

Variétés algébriques dont le fibré tangent est totalement décomposé

Par *Stéphane Druel* à Paris

Introduction

Soit X une variété compacte kählérienne dont le revêtement universel $\tilde{X}$ est isomorphe au produit $\prod_{i \in I} U_i$ de variétés complexes lisses et sur lequel le groupe $\pi_1(X)$ agit diagonalement. La décomposition $T_{\tilde{X}} = \bigoplus_{i \in I} p_i^* T_{U_i}$ induit alors une décomposition de T_X en somme directe de sous-fibrés intégrables. Ce travail contribue à l'étude de l'assertion réciproque et complète les résultats déjà obtenus par Beauville ([B1]):

Théorème 1. *Soient X une variété projective lisse de dimension $n \geq 1$ dont le fibré tangent est totalement décomposé et $T_X = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ ladite décomposition. On suppose que les fibrés $\bigoplus_{i \in I} M_i$ sont intégrables, pour tout ensemble d'indices $I \subset \{1, \dots, n\}$. Le revêtement universel $\tilde{X}$ de X est alors produit de surfaces de Riemann et la décomposition de T_X est induite par la décomposition canonique de $T_{\tilde{X}}$.*

Rappelons qu'une variété projective lisse est dite *minimale* si K_X est numériquement effectif.

Théorème 2. *Soit X une variété projective lisse minimale de dimension $n \geq 1$ dont le fibré tangent est totalement décomposé. Le revêtement universel $\tilde{X}$ de X est alors produit de surfaces de Riemann et la décomposition de T_X est induite par la décomposition canonique de $T_{\tilde{X}}$.*

Nous démontrons ces résultats en exhibant une fibration lisse de X munie d'une connexion intégrable compatible à la décomposition de T_X .

Remerciements. Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Arnaud Beauville pour m'avoir soumis ce problème et pour l'aide qu'il m'a apportée.

Démonstration des théorèmes

Lemme 1 ([B1], lemme 3.1). *Soient X une variété lisse et E un facteur direct de T_X . La classe d'Atiyah $\text{at}(E) \in H^1(X, \Omega_X^1 \otimes \mathcal{E}nd(E))$ provient de $H^1(X, E^* \otimes \mathcal{E}nd(E))$. En particulier, tout élément de $H^r(X, \Omega_X^r)$ donné par un polynôme en les classes de Chern de E est nul, pour r strictement plus grand que le rang de E .*

Corollaire 1. *Soient X une variété projective lisse de dimension $n \geq 1$, E un facteur direct de T_X de rang 1 et $C \subset X$ une courbe rationnelle irréductible. Alors $\deg(E|_C) = 0$ ou $\deg(E|_C) \geq 2$.*

Démonstration. Soit $\mathbb{P}^1 \xrightarrow{v} C$ la normalisation de C . Supposons $\deg(E|_C) \leq 1$; le groupe de cohomologie $H^1(\mathbb{P}^1, E^*_{|\mathbb{P}^1})$ est donc nul. Considérons le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, E^*) & \longrightarrow & H^1(X, \Omega_X^1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(\mathbb{P}^1, E^*_{|\mathbb{P}^1}) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1). \end{array}$$

L'élément $c_1(E) \in H^1(X, \Omega_X^1)$ provient de $H^1(X, E^*)$ (lemme 1); son image

$$c_1(E_{|\mathbb{P}^1}) = \deg(E|_C)$$

dans $H^1(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1)$ est donc nulle, ce qui prouve le corollaire.

Corollaire 2. *Soient X une variété projective lisse de dimension $n \geq 1$ dont le fibré tangent est totalement décomposé et $\mathbb{P}^1 \xrightarrow{v} X$ un morphisme non constant. Alors X n'est pas minimale.*

Démonstration. Ecrivons $v^*T_X = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_n)$ avec $a_1 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$ (corollaire 1). L'application tangente $T_{\mathbb{P}^1} \xrightarrow{dv} v^*T_X$ étant génériquement injective, on a $a_1 \geq 2$. On en déduit $\deg(v^*K_X) \leq -2$ et X n'est donc pas minimale.

Soit X une variété projective lisse complexe. Le produit d'intersection entre 1-cycles et diviseurs met en dualité les deux espaces vectoriels réels $N_1(X) = (\{1\text{-cycles}\}/\equiv) \otimes \mathbb{R}$ et $N^1(X) = (\{\text{diviseurs}\}/\equiv) \otimes \mathbb{R}$, où $\equiv$ désigne l'équivalence numérique. Soit

$$NE(X) \subset N_1(X)$$

le cône engendré par les classes des 1-cycles effectifs. Une *raie extrême* est une demi-droite R dans $\overline{NE}(X)$, adhérence de $NE(X)$ dans $N_1(X)$, vérifiant $K_X \cdot R^* < 0$ et telle que pour tout $Z_1, Z_2 \in \overline{NE}(X)$, si $Z_1 + Z_2 \in R$ alors $Z_1, Z_2 \in R$ ([M2]). Une *courbe rationnelle extrême* est une courbe rationnelle irréductible C_0 telle que $\mathbb{R}^+[C_0]$ soit une raie extrême et telle que $-K_X \cdot C_0 \leq \dim X + 1$. Si X est une variété projective lisse non minimale alors X contient une courbe rationnelle extrême ([M2], thm. 1.5). La longueur de la raie extrême R est ([W]):

$$\ell(R) = \inf\{-K_X \cdot C \mid C \text{ étant une courbe rationnelle et } C \in R\}.$$

L'étude des courbes rationnelles extrémales sur les variétés dont le fibré tangent est totalement décomposé fait l'objet du:

Lemme 2. *Soit X une variété projective lisse non minimale de dimension $n \geq 1$ dont le fibré tangent est totalement décomposé. Il existe alors un revêtement étale fini $Z \rightarrow X$ tel que Z soit un fibré en droites projectives pour la topologie étale.*

Démonstration. Soit $R = \mathbb{R}^+[C_0]$ une raie extrémale engendrée par une courbe rationnelle C_0 telle que $\ell(R) = -K_X \cdot C_0$. Notons $\mathbb{P}^1 \xrightarrow{v_0} C_0$ la normalisation de C_0 . Les hypothèses faites entraînent la lissité du schéma $\text{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ (corollaire 1). Soit

$$V \subset \text{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$$

la composante connexe (de dimension $\ell(R) + n$) contenant le point v_0 . Le groupe

$$G = \text{PGL}_2(\mathbb{C})$$

agit de manière naturelle sur V par la formule $g.v = vg^{-1}$. Soient $\text{Chow}(X)$ la variété projective paramétrant les 1-cycles effectifs et $V \xrightarrow{\alpha} \text{Chow}(X)$ le morphisme naturel G -équivariant qui à $\mathbb{P}^1 \xrightarrow{v} X$ associe le 1-cycle $v(\mathbb{P}^1)$ (v est birationnel au dessus de $v(\mathbb{P}^1)$). Enfin, soit Y la normalisation de $\overline{\alpha(V)}$ dans le corps $k(V)^G$. Alors Y est le quotient géométrique de V par G et l'action de G sur V est libre ([M1], lemme 9 et [W], Appendice A4); Y est une variété projective et lisse de dimension $n + \ell(R) - 3$. Soit $\mathbb{P}^1 \times V \xrightarrow{F} X \times Y$ le morphisme naturel et soit $Z = \text{Spec}((F_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times V})^G)$. Alors Z est le quotient géométrique de $\mathbb{P}^1 \times V$ par G , l'action de G étant donnée par la formule $g.(z, v) = (g(z), vg^{-1})$; Z est une variété projective et lisse de dimension $n + \ell(R) - 2$ et $Z \rightarrow Y$ est un fibré en droites projectives pour la topologie étale ([M1], p. 603). Le morphisme universel G -équivariant $\mathbb{P}^1 \times V \rightarrow X$ (l'action de G sur X étant triviale) est lisse ([K], II 3.5.4) et induit un morphisme propre et lisse $Z \rightarrow X$ de dimension relative $\ell(R) - 2$.

Montrons que $\ell(R) = 2$. Soit $v \in V$. Ecrivons $v^*T_X = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_n)$ avec $a_1 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$ et $a_1 \geq 2$. Il existe un ouvert $U \subset V$ non vide tel que le n -uplet $(a_1, \dots, a_n)$ soit indépendant de $v \in U$. Considérons le morphisme:

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{\psi} X \times X, \\ v &\longrightarrow (v(0), v(\infty)). \end{aligned}$$

La différentielle de ψ est donnée par la formule ([K], II 3.4):

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{P}^1, v^*T_X) &\xrightarrow{d\psi(v)} v^*T_X \otimes k(0) \oplus v^*T_X \otimes k(\infty), \\ s &\longrightarrow (s(0), s(\infty)). \end{aligned}$$

Calculons le rang de ladite différentielle. Considérons les applications linéaires $(d\psi)_i(v)$ ($1 \leq i \leq n$):

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)) &\rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i) \otimes k(0) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i) \otimes k(\infty), \\ s_i &\rightarrow (s_i(0), s_i(\infty)). \end{aligned}$$

Le rang de $(d\psi(v))_i$ est 2 si $a_i \geq 1$ et 1 si $a_i = 0$, de sorte que, pour $v \in U$:

$$\text{rang}(d\psi(v)) = 2 \text{Card}\{i | a_i \geq 1\} + \text{Card}\{i | a_i = 0\}.$$

Evaluons la dimension de l'image de ψ . Soient p et q les projections de $X \times X$ sur chacun des facteurs. Le morphisme $Z \rightarrow X$ étant propre et lisse, $p(\text{Im}(\psi)) = X$. Si

$$x \in p(\text{Im}(\psi)) = X, \quad p^{-1}(x) \cap \text{Im}(\psi)$$

s'identifie, via la projection q , au lieu des points de X par lesquels il passe une courbe rationnelle $v(\mathbb{P}^1)$ ($v \in V$) contenant x et sa dimension est donc au moins $\ell(R) - 1$ ([W], 1.11). Il en résulte que la dimension de l'image de ψ est au moins égale à $n + \ell(R) - 1$. On a donc:

$$\dim(\text{Im}(\psi)) = 2 \text{Card}\{i | a_i \geq 1\} + \text{Card}\{i | a_i = 0\} \geq n + \ell(R) - 1 = n - 1 + \sum_{i=1}^n a_i.$$

Comme $a_1 \geq 2$:

$$n - 1 + \sum_{i=1}^n a_i \geq n - 1 + 2 + (\text{Card}\{i | a_i \geq 1\} - 1) = 2 \text{Card}\{i | a_i \geq 1\} + \text{Card}\{i | a_i = 0\}.$$

D'où:

$$\text{Card}\{i | a_i \geq 1\} = \ell(R) - 1 = \sum_{i=1}^n a_i - 1.$$

On en déduit $\ell(R) = 2$ et $(a_1, \dots, a_n) = (2, 0, \dots, 0)$ puisque $a_i = 0$ ou bien $a_i \geq 2$ (corollaire 1). Le morphisme $Z \rightarrow X$ est donc un revêtement étale fini, ce qui termine la preuve du lemme.

Corollaire 3. *Soit X une variété projective lisse de dimension $n \geq 1$ dont le fibré tangent est totalement décomposé. Alors X est uniréglée si et seulement si X n'est pas minimale.*

Démonstration. Si X est uniréglée alors X n'est pas minimale par le corollaire 2. Supposons inversement X non minimale; le lemme 2 entraîne l'existence d'un revêtement étale fini Z de X , avec Z uniréglée. La variété X est donc uniréglée, ce qui termine la preuve du corollaire.

Soient X et Y deux variétés projectives lisses et $X \xrightarrow{\phi} Y$ un morphisme lisse. Une connexion sur ϕ est un scindage de la suite exacte

$$0 \rightarrow \phi^* \Omega_Y^1 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_{X/Y}^1 \rightarrow 0,$$

c'est-à-dire un sous-fibré $E \subset \Omega_X^1$ tel que le morphisme $E \rightarrow \Omega_{X/Y}^1$ induit par la projection $\Omega_X^1 \rightarrow \Omega_{X/Y}^1$ soit un isomorphisme. La connexion est dite *intégrable* si $dE \subset E \wedge \Omega_X^1$ ou bien, ce qui est équivalent, si le noyau de la surjection $T_X \rightarrow E^*$ est intégrable au sens usuel. Le morphisme ϕ est alors analytiquement localement trivial de fibre F et X s'identifie

au quotient de $\tilde{Y} \times F$ par le groupe $\pi_1(Y)$ agissant diagonalement où $\tilde{Y}$ est le revêtement universel de Y ; le scindage $\Omega_X^1 = \phi^* \Omega_Y^1 \oplus E$ se relève en la décomposition

$$\Omega_{\tilde{Y} \times F}^1 = \Omega_{\tilde{Y}}^1 \oplus \Omega_F^1$$

([B1], 4.5).

Proposition 1. *Si le théorème 1 est vrai en dimension $n \geq 1$, il est vrai en dimension $n + 1$ pour les variétés non minimales.*

Démonstration. Soient X une variété projective lisse non minimale de dimension $n + 1$ ($n \geq 1$) dont le fibré cotangent est totalement décomposé et $\Omega_X^1 = L_1 \oplus \cdots \oplus L_{n+1}$ ladite décomposition. Quitte à passer à un revêtement étale, on peut toujours supposer qu'il existe une variété projective lisse Y de dimension n et un morphisme $X \xrightarrow{\phi} Y$ dont les fibres sont des droites projectives (lemme 2). Soit C une fibre de ϕ . Posons $d_i = L_i \cdot C$ et supposons $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_{n+1}$. Considérons la suite exacte:

$$0 \rightarrow N_{C/X}^* = \mathcal{O}_C^{\oplus n} \rightarrow \Omega_{X|C}^1 \rightarrow \Omega_C^1 = \mathcal{O}_C(-2) \rightarrow 0.$$

Le groupe $\text{Ext}_{\mathcal{O}_C}^1(\mathcal{O}_C(-2), \mathcal{O}_C^{\oplus n})$ est nul et l'extension précédente est donc triviale. On en déduit $d_1 = -2$ et $d_i = 0$ pour $i \geq 2$ puis, par les théorèmes de changement de base, qu'il existe des fibrés inversibles $(E_i)_{2 \leq i \leq n+1}$ sur Y tels que $L_i = \phi^* E_i$. On vérifie par restriction aux fibres que l'application $\phi^* \Omega_Y^1 \rightarrow L_1$ est identiquement nulle; les sous-fibrés $\phi^* \Omega_Y^1$ et $L_2 \oplus \cdots \oplus L_{n+1}$ de Ω_X^1 sont donc égaux et l'application $L_1 \rightarrow \Omega_{X/Y}^1$ est un isomorphisme. On en déduit que T_Y est totalement décomposé et on vérifie que la condition d'intégrabilité du théorème est satisfaite. Le fibré L_1 détermine une connexion intégrable sur ϕ et l'assertion souhaitée en résulte facilement.

La suite de notre travail est consacrée à l'étude des variétés minimales dont le fibré tangent est totalement décomposé.

Lemme 3. *Soient X une variété projective lisse minimale dont le fibré tangent est totalement décomposé et $T_X = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ ($n \geq 1$) ladite décomposition. Soit H une section hyperplane de X . Alors $M_i H^{n-1} \leq 0$ et si l'inégalité précédente est une égalité on a $c_1(M_i) = 0$.*

Démonstration. La variété X n'étant pas uniréglée (corollaire 3) il existe une courbe lisse $C \in |mH| \cap \cdots \cap |mH|$ ($m \gg 0$) telle que le fibré $\Omega_{X|C}^1$ soit numériquement effectif ([Mi]), c'est-à-dire telle que le faisceau inversible $\mathcal{O}_Z(1)$ soit numériquement effectif, où $Z = \mathbb{P}_C(\Omega_{X|C}^1)$. Soit σ_i la section de $Z \rightarrow C$ associée à la surjection $\Omega_{X|C}^1 \twoheadrightarrow M_i|_C$. On a donc $\sigma_i(C) \cdot \mathcal{O}_Z(1) = C \cdot M_i^{-1} \geq 0$, ce qui prouve la première assertion. La seconde résulte du théorème de l'indice de Hodge puisque $M_i^2 = 0$ (lemme 1).

Proposition 2 ([B1], théorème C). *Soient X une variété projective lisse de dimension $n \geq 1$ dont le fibré tangent est totalement décomposé et $T_X = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ ladite décomposition. On suppose qu'il existe une section hyperplane H de X telle que $M_i \cdot H^{n-1} < 0$ pour $1 \leq i \leq n$. Le revêtement universel $\tilde{X}$ de X est alors isomorphe au produit D^n où $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ et la décomposition de T_X est induite par la décomposition canonique de $T_{\tilde{X}}$.*

Lemme 4. *Soit X une variété projective lisse minimale dont le fibré tangent est totalement décomposé. La composante neutre G du groupe des automorphismes de X est alors une variété abélienne.*

Démonstration. Soit $T_X = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ ($n \geq 1$) la décomposition de T_X . On a $H^0(X, M_i) = (0)$ sauf si le fibré M_i est trivial (lemme 3). Soit $k = h^0(X, T_X)$ la dimension de G et soit $\mathcal{O}(x)$ une orbite de dimension minimale ($x \in X$) en particulier fermée. Considérons les applications tangentés:

$$T_{G, \text{id}} = H^0(X, T_X) \rightarrow T_{\mathcal{O}(x), x} \rightarrow T_{X, x}.$$

L'application $H^0(X, T_X) \rightarrow T_{X, x}$ obtenue est l'évaluation en x qui est injective. On en déduit que l'application $T_{G, \text{id}} \rightarrow T_{\mathcal{O}(x), x}$ est un isomorphisme puis que le morphisme $G \rightarrow \mathcal{O}(x)$ est un revêtement étale fini. Les variétés G et $\mathcal{O}(x)$ sont donc des variétés abéliennes de dimension k .

Lemme 5 ([B2], proposition 2.1). *Soient X une variété projective lisse de dimension $n \geq 2$ et M un fibré inversible non trivial dont le première classe de Chern $c_1(M) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ est nulle. On suppose qu'il existe deux 1-formes non nulles*

$$\alpha \in H^0(X, \Omega_X^1 \otimes M) \quad \text{et} \quad \omega \in H^0(X, \Omega_X^1)$$

telles que $\alpha \wedge \omega = 0$. Alors il existe un morphisme surjectif à fibres connexes $X \rightarrow C$ vers une courbe lisse C de genre $g(C) \geq 1$ tel que ω provienne par image réciproque de $H^0(C, \Omega_C^1)$.

Soient X une variété projective lisse et $X \xrightarrow{\phi} C$ un morphisme surjectif vers une courbe lisse C . Le diviseur de ramification de ϕ est défini par la formule:

$$D(\phi) = \sum_{p \in C} \phi^* p - (\phi^* p)_{\text{red}};$$

on démontre que les sections du fibré $\phi^* \omega_C(D(\phi))$ sont holomorphes, i.e.,

$$\phi^* \omega_C(D(\phi)) \subset \Omega_X^1$$

([D], lemme 4.4).

Lemme 6 ([B2]). *Soient X une variété projective lisse de dimension $n \geq 2$, $X \xrightarrow{\phi} C$ un morphisme surjectif vers une courbe projective lisse C et D un diviseur vertical. On a $D^2 \leq 0$ et si $D^2 = 0$ alors il existe $r \in \mathbb{Q}^*$ tel que $rD \in \phi^* \text{Pic}(C)$.*

Lemme 7. *Soient X une variété projective lisse de dimension $n \geq 2$ et $X \xrightarrow{\phi} C$ un morphisme surjectif vers une courbe lisse C . Soit $L = \phi^* \omega_C(D(\phi)) \subset \Omega_X^1$ où $D(\phi)$ est le diviseur de ramification de ϕ . Si L est un sous-fibré du fibré cotangent et $L^2 = 0$ alors les fibres de ϕ sont lisses ou multiples de variétés lisses.*

Démonstration. Ecrivons $D(\phi) = D_1 + \cdots + D_k$ ($k \geq 1$) où $D_i = \phi^* p_i - (\phi^* p_i)_{\text{red}}$, les points $p_i \in C$ étant tous distincts et soit $\phi^* p_i = \sum_j n_{i,j} D_{i,j}$ la décomposition de la fibre schématique $\phi^* p_i$ en somme de ses composantes irréductibles ($n_{i,j} \geq 1$). Le diviseur $D(\phi)$

est vertical et on a donc $D_i^2 = 0$ pour tout entier $i \in \{1, \dots, k\}$ (lemme 6). On en déduit qu'il existe $r_i \in \mathbb{Q}^*$ tel que $r_i D_i \in \phi^* \text{Pic}(C)$ (lemme 6). On a donc $n_{i,j} = n_{i,k} = n_i$ pour tout triplet (i, j, k) et $D_i = (n_i - 1)(\phi^* p_i)_{\text{red}}$. Prenons un point $p_i \in C$ tel que la fibre schématique $\phi^* p_i$ soit non réduite. Soient $V \subset C$ un disque ouvert pour la topologie usuelle contenant le point p_i et $U = \phi^{-1}(V)$. On suppose que p_i est le seul point de V au dessus duquel la fibre est non réduite. En effectuant le changement de base local $z \mapsto z^{n_i}$, puis en normalisant, on obtient un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{q} & U \\ \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi \\ V_1 & \xrightarrow{z \mapsto z^{n_i}} & V \end{array}$$

où q est un revêtement étale fini et ϕ_1 est un morphisme à fibres réduites et connexes. L'inclusion $L \subset \Omega_X^1$ se relève en l'inclusion naturelle $\phi_1^* \omega_{V_1} \subset \Omega_{U_1}^1$ et le morphisme ϕ_1 est donc lisse, ce qui termine la preuve du lemme.

Proposition 3. *Soient X une variété projective lisse minimale de dimension $n \geq 1$ dont le fibré tangent est totalement décomposé et M un facteur direct de ladite décomposition. Si $c_1(M) = 0$ alors M est de torsion.*

Démonstration. Soient $\Omega_X^1 = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$ la décomposition du fibré cotangent et H une section hyperplane de X . On suppose que l'un des facteurs L_i ($1 \leq i \leq n$) est de première classe de Chern nulle mais pas de torsion.

Un fibré inversible de torsion est trivialisé par un revêtement étale fini et un fibré inversible qui n'est pas de torsion le reste après ledit revêtement. On peut donc supposer que les fibrés $L_1, \dots, L_k$ sont de première classe de Chern nulles mais pas de torsion ($k \geq 1$) et que les fibrés $L_{k+1}, \dots, L_{k+r}$ sont triviaux. On a enfin $L_i H^{n-1} > 0$ pour $i \geq k+r+1$ (lemme 3). On a donc $h^0(X, T_X) = r$ et pour tout revêtement étale fini $Z \rightarrow X$ on a $h^0(Z, T_Z) = r$.

La théorie de Hodge fournit un isomorphisme antilinéaire

$$H^1(X, L_1) \simeq H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L_1^{-1})$$

([B2], 3.4) puisque $c_1(L_1) = 0$ et on a donc $H^1(X, L_1) \neq 0$. Il existe alors deux 1-formes non nulles $\alpha \in H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L_1^{-1})$ et $\omega \in H^0(X, \Omega_X^1)$ telles que $\alpha \wedge \omega = 0$ ([B2], théorème 2.2 et [S]) et un fibré inversible $L \subset \Omega_X^1$ tel que $\omega \in H^0(X, L)$ (lemme 5). La 1-forme α détermine une application injective $L_1 \rightarrow \Omega_X^1$ dont l'image sera notée M . La condition $\alpha \wedge \omega = 0$ signifie que les deux sous-faisceaux L et M de Ω_X^1 coïncident sur un ouvert non vide de X . Or il existe un entier $m \in \{1, \dots, n\}$ tel que la projection $M \rightarrow L_m$ soit non nulle. La composante α_m de α sur le facteur direct $H^0(X, L_m \otimes L_1^{-1})$ de $H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L_1^{-1})$ est donc non nulle. La projection $L \rightarrow L_m$ est également non nulle puisque les sous-faisceaux L et M de Ω_X^1 coïncident génériquement. Notons ω_m la composante non nulle de ω sur le facteur direct $H^0(X, L_m)$ de $H^0(X, \Omega_X^1)$. Par choix des formes α_m et ω_m on a $\alpha_m \wedge \omega_m = 0$. On en déduit qu'il existe un morphisme surjectif à fibres connexes $X \xrightarrow{\phi} C$ vers une courbe C de genre $g(C) \geq 1$ tel que la forme ω_m provienne par image réciproque de $H^0(C, \Omega_C^1)$

(lemme 5). Les sous-faisceaux $\phi^* \omega_C$ et L_m de Ω_X^1 coïncident sur un ouvert non vide puisque $\omega_m \in H^0(X, L_m)$. On en déduit l'égalité $L_m = \phi^* \omega_C(D(\phi))$ où $D(\phi)$ est le diviseur de ramification de ϕ ([D], lemmes 4.1, 4.2 et 4.4). Or $L_m^2 = 0$ (lemme 1) et les fibres de ϕ sont donc lisses ou multiples de variétés lisses (lemme 7). La courbe C étant de genre au moins 1, il existe un morphisme fini $C_1 \xrightarrow{\pi} C$ tel que l'indice de ramification de π en $q \in C_1$ soit égal à la multiplicité de la fibre $\phi^{-1}(\pi(q))$ ([K-O], lemme 6.1). Soit X_1 la normalisation du produit fibré $X \times_C C_1$ et soient $X_1 \xrightarrow{\phi_1} C_1$ et $X_1 \xrightarrow{\pi_1} X$ les morphismes naturels. Le morphisme ϕ_1 est lisse et π_1 est un revêtement étale. Les sous-fibrés $\phi_1^* \omega_{C_1}$ et $\pi_1^* L_m$ de $\Omega_{X_1}^1$ coïncident et le fibré $\bigoplus_{i \neq m} \pi_1^* L_i$ détermine donc une connexion sur ϕ_1 qui est automatiquement intégrable puisque C_1 est une courbe. Le morphisme ϕ_1 est donc analytiquement localement trivial de fibre F . De plus il existe un morphisme non nul $\pi_1^* L_1 \rightarrow \pi_1^* L_m$. On a donc $\pi_1^* L_m = \pi_1^* L_1(D)$ où D est un diviseur effectif. On en déduit que D est vertical puisque $c_1(\pi_1^* L_1) = 0$ et $\pi_1^* L_m = \phi_1^* \omega_{C_1}$ puis qu'il existe un fibré M_1 sur C_1 tel que $\pi_1^* L_1 = \phi_1^* M_1$. Remarquons enfin que $g(C_1) \geq 2$. Sinon C_1 serait une courbe elliptique et puisqu'on a une application non triviale $\pi_1^* L_1 \rightarrow \pi_1^* L_m = \phi_1^* \omega_{C_1}$ le fibré L_1^{-1} serait donc trivial ce qui est contraire aux hypothèses. On a donc $m \neq 1$ et $c_1(\pi_1^* L_m) \neq 0$.

Le fibré tangent T_F est totalement décomposé et F est minimale puisque $K_F = K_{X_1/F}$. La composante neutre G du groupe des automorphismes de F est donc une variété abélienne (lemme 4). On a enfin $h^0(F, T_F) \geq h^0(X_1, T_{X_1}) + 1$ puisque la restriction du facteur $\pi_1^* L_1$ à F est triviale. Considérons le schéma en groupes $\text{Aut}^0(X_1/C_1)$ au dessus de C_1 dont la fibre au dessus d'un point $p \in C_1$ est la composante neutre du groupe des automorphismes de $\phi_1^{-1}(p)$. Ladite fibre est une variété abélienne isomorphe à G puisque les fibres de ϕ_1 sont toutes isomorphes à F . Il existe donc un revêtement étale fini $C_2 \rightarrow C_1$ trivialisant ledit schéma en groupes. Cette assertion résulte de l'existence d'un espace de modules fin pour les variétés abéliennes munies d'une polarisation de degré donné et d'une structure de niveau $n \geq 3$. On en déduit que le groupe G agit sur le produit fibré $X_2 = X_1 \times_{C_1} C_2$ puis que $\dim G = h^0(F, T_F) \leq h^0(X_2, T_{X_2})$. Or $h^0(X_2, T_{X_2}) = h^0(X_1, T_{X_1}) \leq h^0(F, T_F) - 1$ puisque la projection $X_2 \rightarrow X_1$ est un revêtement étale, ce qui donne la contradiction cherchée.

Lemme 8. *Soit X une variété projective lisse de dimension $n \geq 1$. On suppose que la composante neutre G du groupe des automorphismes de X est une variété abélienne de dimension $k \geq 1$ et que l'application canonique $H^0(X, T_X) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1)^*$ est injective. Il existe alors un revêtement étale fini G -équivariant $G \times F \rightarrow X$, G agissant diagonalement sur $G \times F$ par translations sur G et trivialement sur F .*

Démonstration. Soient $A = H^0(X, \Omega_X^1)^* / \text{Im}(H_1(X, \mathbb{Z}))$ la variété d'Albanese de X et $x \in X$ un point de X . Considérons le morphisme d'Albanese:

$$X \xrightarrow{a} A,$$

$$y \longmapsto \left[\omega \mapsto \int_x^y \omega \right].$$

Le groupe G étant connexe, la représentation canonique $G \rightarrow \text{GL}(H^0(X, \Omega_X^1))$ est triviale et toute 1-forme holomorphe sur X est donc G -invariante. On en déduit que pour tout couple $(y, z) \in X \times X$ et tout $g \in G$ on a $\left[\omega \mapsto \int_y^{g(y)} \omega \right] = \left[\omega \mapsto \int_z^{g(z)} \omega \right]$ dans A . Notons

$\mathcal{O}(x)$ l'orbite de x sous G . L'application:

$$G \rightarrow A,$$

$$g \rightarrow \left[\omega \mapsto \int_x^{g(x)} \omega \right]$$

obtenue par composition de l'inclusion naturelle $\mathcal{O}(x) \subset X$ et du morphisme d'Albanese est donc un morphisme de groupes algébriques indépendant du point $x \in X$ considéré et le morphisme d'Albanese est G -équivariant, G agissant par translations sur A via le morphisme $G \rightarrow A$. Notons que l'image de $G \rightarrow A$ est une variété abélienne de dimension k . En effet, l'application tangente dudit morphisme est l'application canonique

$$H^0(X, T_X) \otimes \mathcal{O}_G \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1)^* \otimes \mathcal{O}_G,$$

qui est injective par hypothèse. On en déduit qu'il existe une sous-variété abélienne $B \subset A$ de dimension $\dim(A) - k$ telle que le morphisme canonique $G \times B \rightarrow A$ soit étale fini ([Mu], théorème de Poincaré). Soient X_1 le produit fibré $X \times_A (G \times B)$ et q la projection sur G . Le groupe G agit diagonalement sur le produit $G \times B$ en agissant par translations sur lui-même et trivialement sur B ; le morphisme $G \times B \rightarrow A$ est alors G -équivariant. On en déduit que G agit librement sur X_1 et que le morphisme q est G -équivariant. Il en résulte que X_1 est isomorphe, au dessus de G , au produit $G \times F$, F étant une fibre de q , ce qui termine la preuve du lemme.

Lemme 9. *Soient G une variété abélienne de dimension $n \geq 1$ et F une variété projective lisse de dimension $m \geq 1$. Alors toute connexion sur la projection $G \times F \rightarrow F$ est intégrable.*

Démonstration. Notons $E \subset \Omega_{G \times F}^1$ ladite connexion. Le fibré E est trivial et il existe donc des 1-formes $\omega_i \in H^0(G \times F, \Omega_{G \times F}^1)$ ($1 \leq i \leq n$) telles que

$$E = \mathcal{O}_{G \times F} \omega_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{G \times F} \omega_n.$$

Soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions holomorphes définies sur un ouvert de $G \times F$. On a la formule:

$$d\left(\sum_{i=1}^n f_i \omega_i\right) = \sum_{i=1}^n df_i \wedge \omega_i + \sum_{i=1}^n f_i d\omega_i.$$

Or $d\omega_i = 0$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ puisque $G \times F$ est projective. On a donc $dE \subset E \wedge \Omega_{G \times F}^1$ ce qui termine la preuve du lemme.

Théorème 2. *Soit X une variété projective lisse minimale de dimension $n \geq 1$ dont le fibré tangent est totalement décomposé. Le revêtement universel $\tilde{X}$ de X est alors produit de surfaces de Riemann et la décomposition de T_X est induite par la décomposition canonique de $T_{\tilde{X}}$.*

Démonstration. Soit $\Omega_X^1 = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$ ($n \geq 1$) la décomposition du fibré co-tangent et soit H une section hyperplane de X . On a $c_1(L_i)H^{n-1} \geq 0$ (lemme 3) et si

$c_1(L_i)H^{n-1} > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la proposition 2 permet de conclure. Quitte à permuter les L_i on peut toujours supposer que les fibrés $L_1, \dots, L_k$ ($k \geq 1$) sont de torsion et que $c_1(L_i) \neq 0$ pour $i \geq k+1$ (proposition 3). Il existe un revêtement étale fini de X trivialisant ces fibrés et il suffit donc de traiter le cas où lesdits fibrés sont triviaux. On a alors $h^0(X, L_i^{-1}) = 0$ pour $i \geq k+1$ (lemme 3) et $h^0(X, T_X) = k$. Soit G la composante neutre du groupe des automorphismes de X ; G est une variété abélienne de dimension k (lemme 4). L'application canonique $H^0(X, T_X) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1)^*$ est injective et il existe donc un revêtement étale fini $G \times F \xrightarrow{p} X$ (lemme 8) où F est une variété projective lisse. Le morphisme p étant étale, on a $\Omega_{G \times F}^1 = p^* \Omega_X^1 = p^* L_1 \oplus \dots \oplus p^* L_n$ et

$$(p^* L_i)(p^* H^{n-1}) > 0$$

pour $i \geq k+1$ (lemme 3). Par hypothèse, les fibrés $p^* L_i$ sont triviaux pour $i \in \{1, \dots, k\}$. On en déduit $h^0(G \times F, p^* L_i^{-1}) = 0$ pour $i \geq k+1$ puis $h^0(G \times F, T_{G \times F}) = k$ et

$$h^0(G \times F, s^* T_F) = 0$$

où s désigne la projection de $G \times F$ sur F . Notons r la projection sur G . L'application $s^* \Omega_F^1 \rightarrow p^* L_1 \oplus \dots \oplus p^* L_k$ est identiquement nulle et les sous-fibrés

$$s^* \Omega_F^1 \quad \text{et} \quad p^* L_{k+1} \oplus \dots \oplus p^* L_n$$

de $\Omega_{G \times F}^1$ sont donc isomorphes. On en déduit que l'application

$$p^* L_1 \oplus \dots \oplus p^* L_k \rightarrow r^* \Omega_G^1$$

est un isomorphisme. Soit x un point de F . Le fibré $p^* L_{i|_{G \times \{x\}}}$ ($k+1 \leq i \leq n$) est donc facteur direct du fibré trivial $\mathcal{O}_{G \times \{x\}} \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{G \times \{x\}}$ et donc lui-même trivial. Il existe donc des fibrés $E_i \in \text{Pic}(F)$ ($k+1 \leq i \leq n$) tels que $p^* L_i = s^* E_i$. Soit H_F une section hyperplane de F . On a donc $E_i H_F^{n-k-1} > 0$ (lemme 3) puisque $c_1(L_i) \neq 0$ pour $i \geq k+1$. On a

$$\Omega_F^1 = E_{k+1} \oplus \dots \oplus E_n$$

et la proposition 2 permet de conclure puisque le fibré $p^* L_1 \oplus \dots \oplus p^* L_k$ détermine une connexion intégrable sur la projection s (lemme 9).

Remarque ([B2]). L'hypothèse d'intégrabilité dans le théorème 1 est effectivement nécessaire. En effet, notons X le produit $A \times \mathbb{P}^1$ où A est une surface abélienne. Il n'est pas difficile d'exhiber une connexion non intégrable sur la projection canonique $X \rightarrow A$; la décomposition de T_X ainsi obtenue ne se relève donc pas en la décomposition canonique du fibré tangent $T_{\tilde{X}}$ où $\tilde{X}$ est le revêtement universel de X .

Références

- [B1] A. Beauville, Complex manifolds with split tangent bundle, Vol. en mémoire de M. Schneider, de Gruyter, à paraître.
- [B2] A. Beauville, Annulation du H^1 pour les fibrés en droites plats, Lect. Notes Math. **1507** (1992), 1–15.
- [D] S. Druel, Structures de Poisson sur les variétés algébriques de dimension trois, Bull. Soc. Math. France **127** (1999), 229–253.

- [K-O] *S. Kobayashi, T. Ochiai*, Holomorphic structures modeled after hyperquadrics, Tôhoku Math. J. **34** (1982), 587–629.
- [K] *J. Kollár*, Rational curves on algebraic varieties, Springer, Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo 1996.
- [Mi] *Y. Miyaoka*, The Chern classes and Kodaira dimension of minimal variety, Adv. Stud. Pure Math. **10** (1987), 449–476.
- [M1] *S. Mori*, Projective manifolds with ample tangent bundles, Ann. Math. **110** (1979), 593–606.
- [M2] *S. Mori*, Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective, Ann. Math. **116** (1982), 133–176.
- [Mu] *D. Mumford*, Abelian Varieties, Oxford University Press, 1970.
- [S] *C. Simpson*, Subspaces of moduli spaces of rank one local systems, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **26** (1993), 361–401.
- [W] *J. Wisniewski*, Length of extremal rays and generalized adjunction, Math. Z. **200** (1989), 409–427.

DMI-École Normale Supérieure, 45 rue d’Ulm, F-75005 Paris
e-mail: druel@clipper.ens.fr

Eingegangen 14. Juni 1999, in revidierter Fassung 6. September 1999