Michigan Math. J. 61 (2012), 615–630

Invariants de Hasse–Witt des Réductions de Certaines Variétés Symplectiques Irréductibles

Stéphane Druel

1. Introduction

On définit *l'invariant de Hasse–Witt* d'une variété algébrique X projective et lisse sur un corps parfait de caractéristique > 0 comme le rang stable du Frobenius absolu agissant sur $\mathrm{H}^{\dim(X)}(X, \mathcal{O}_X)$. On étudie dans cette note la question suivante (voir [BoZ; MuSr, Conj. 1.1]).

Conjecture 1. *Soient K un corps de nombres et $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K. Soit X une K-variété projective lisse. Soient $f : \mathcal{X} \to \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_K)$ un modèle entier de X et $\mathcal{V}$ un ensemble fini de places non archimédiennes de K tel que f soit lisse au-dessus de l'ouvert $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_K[\mathcal{V}^{-1}])$ de $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_K)$. Il existe alors un ensemble Σ de places finies de K de densité > 0 tel que pour tout $v \in \Sigma \setminus \mathcal{V}$ l'invariant de Hasse–Witt de $\mathcal{X}_v$ soit maximal.*

On étudie le cas *a priori* le plus simple : on suppose $\det(\Omega^1_X) \simeq \mathcal{O}_X$. On sait, d'après le théorème de décomposition de Bogomolov (voir [B, Thm. 1]), que toute variété (lisse) complexe compacte Kählérienne avec $c_1(X) = 0 \in \mathrm{H}_{\mathrm{dR}}(X, \mathbf{C})$ est à un revêtement étale fini et à un isomorphisme près un produit $T \times \prod_{i \in I} Y_i \times \prod_{j \in J} Z_j$ où

- T est un tore complexe,
- Y_i est une variété de *Calabi–Yau*, c'est-à-dire, Y_i est projective, simplement connexe (de dimension ≥ 3) et $\mathrm{H}^0(Y_i, \Omega^{\bullet}_{Y_i}) = \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}\omega_i$ où ω_i est une forme différentielle de degré $\dim(Y_i)$ partout non nulle,
- Z_j est *symplectique irréductible,* c'est-à-dire, Z_j est simplement connexe et $\mathrm{H}^0(Z_j, \Omega^{\bullet}_{Z_j}) = \mathbf{C}[\varphi_j]$ où φ_j est une 2-forme partout non dégénérée.

On a très peu d'exemples de variétés symplectiques irréductibles. Beauville a constuit deux familles de variétés symplectiques (irréductibles) de dimension $2m$ (pour tout entier $m \geq 1$) : l'une est (à déformation près) le schéma de Hilbert "des points" $S^{[m]}$ d'une surface $K3$ S [B, Thm. 3] et l'autre est (à nouveau à déformation près) la varitété de Kummer généralisée $K_m(A)$ d'une surface abélienne A qui par définition est la fibre au-dessus de 0 du morphisme d'Albanese de $A^{[m+1]}$ [B, Thm. 4]. O'Grady a construit deux autres familles d'exemples : l'une une famille de variétés de dimension 10 [O'G1] et deuxième nombre de Betti égal à 24 [Rap]

Received March 15, 2011. Revision received August 11, 2011.

et l'autre une famille de variétés de dimension 6 et deuxième nombre de Betti égal à 8 [O'G2].

On obtient le résultat suivant.

THÉORÈME 2. *Soient K un corps de nombres et $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K. Soit X une variété symplectique irréductible polarisable sur K. Soient $f\colon \mathcal{X} \to$* $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_K)$ *un modèle entier de X et $\mathcal{V}$ un ensemble fini de places non archimédiennes de K tel que f soit lisse au-dessus de l'ouvert* $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_K[\mathcal{V}^{-1}])$ *de* $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_K)$. *On suppose $b_2(X \otimes \mathbf{C}) > 3$. Il existe alors un ensemble Σ de places finies de K de densité > 0 tel que pour tout $v \in \Sigma \setminus \mathcal{V}$ l'invariant de Hasse–Witt de $\mathcal{X}_v$ soit non nul. On peut supposer la densité de Σ égale à 1 quitte à remplacer K par une extension finie L de K convenable.*

Ogus a démontré un résultat analogue pour une surface abélienne quelconque [DMOS, Exp. VI]. Joshi et Rajan [JRaj] puis Bogomolov et Zahrin [BoZ] ont démontré l'énoncé ci-dessus lorsque $\dim(X) = 2$, autrement dit lorsque X est une surface $K3$, auquel cas $b_2(X) = 22$. On utilise ici les mêmes outils.

On sait peu de choses des invariants de Hasse–Witt des réductions modulo un nombre premier des variétés abéliennes et des variétés de Calabi–Yau.

On sait enfin, qu'étant donné une courbe elliptique E sur $\mathbf{Q}$, ses réductions modulo un nombre premier ont un invariant de Hasse–Witt nul pour une infinité de nombres premiers [E] et on montre facilement que la surface de Kummer associée à $E \times E$ a la même propriété.

Soient X une variété symplectique irréductible définie sur un corps premier $\mathbf{F}_p$ de caractéristique p et $\varphi \in \mathrm{H}^0(X, \Omega^2_X) \setminus \{0\}$; φ est une forme différentielle fermée. On montre facilement que l'invariant de Hasse–Witt de X est non nul si et seulement si $C(\varphi) \neq 0$ où C désigne l'opération de Cartier. On fixe un nombre premier $\ell \neq p$. On montre ensuite, à peu de choses près, que si la valuation p-adique de l'une des valeurs propres du "Frobenius géométrique" agissant sur $\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X \otimes \bar{\mathbf{F}}_p, \mathbf{Q}_\ell)$ est nulle alors $C(\varphi) \neq 0$ et l'invariant de Hasse–Witt de X est donc non nul. On conclut avec un énoncé du type théorème de densité de Čebotarev dû à Serre.

On en déduit facilement le résultat suivant.

COROLLAIRE 3. *Soient K un corps de nombres et $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K. Soit X une K-variété lisse et géométriquement connexe, polarisable sur K. Soient $f\colon \mathcal{X} \to$* $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_K)$ *un modèle entier de X et $\mathcal{V}$ un ensemble fini de places non archimédiennes de K tel que f soit lisse au-dessus de l'ouvert* $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_K[\mathcal{V}^{-1}])$ *de* $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_K)$. *On suppose qu'il existe un revêtement étale fini X' de X défini sur K telle que X' soit K-isomorphe à un produit de variétés abéliennes de dimension $\leq$ 2 et de variétés symplectiques irréductibles avec $b_2 > 3$ définies sur K. Il existe alors une extension finie L de K et un ensemble Σ de places finies de L de densité* 1 *tel que pour tout $v \in \Sigma \setminus \mathcal{V}$ l'invariant de Hasse–Witt de $\mathcal{X}_v$ soit non nul.*

REMERCIEMENTS. Je remercie D. Huybrechts de m'avoir indiqué que [An] contient une démonstration de la conjecture de semi-simplicité pour les variétés simplectiques irréductibles sur les corps de nombres sous la seule hypothèse $b_2 \geq 4$

alors que dans une précédente version de ce texte j'en donnais une démonstration (incomplète par ailleurs) dans le cas particulier (auquel André se ramème) où le rang du groupe de Néron-Severi est ≥ 2. Je remercie également le referee de m'avoir indiqué le Lemme 12.

2. Notations et Rappels

2.1

On se donne un corps k et on fixe une clôture algébrique $\bar{k}$ de k. On appelle *variété (algébrique) sur k* ou *k-variété (algébrique)* un schéma de type fini sur k. Soit X une k-variété. On notera $X \otimes \bar{k}$ le produit de X et $\mathrm{Spec}(\bar{k})$ au-dessus de $\mathrm{Spec}(k)$.

On note $h^{i,j} := \dim_k(\mathrm{H}^j(X, \Omega^i_X)) = \dim_{\bar{k}}(\mathrm{H}^j(X \otimes \bar{k}, \Omega^i_{X\otimes\bar{k}}))$.

DÉFINITION 4. On dit qu'une k-variété X lisse est *symplectique* si X est géométriquement intègre et s'il existe une 2-forme fermée $\bar{\varphi} \in \mathrm{H}^0(X \otimes \bar{k}, \Omega^2_{X\otimes\bar{k}})$ qui est non dégénérée en tout point. On dit qu'une variété symplectique X propre sur k est symplectique irréductible si $h^{0,1} = 0$ et $h^{2,0} = 1$.

REMARQUE. Soit X une variété propre et lisse sur k. On suppose X symplectique (en particulier géométriquement intègre). On sait bien qu'on a

$$\mathrm{H}^0(X \otimes \bar{k}, \Omega^2_{X\otimes\bar{k}}) \simeq \mathrm{H}^0(X, \Omega^2_X) \otimes_k \bar{k}$$

et

$$\mathrm{H}^0(X \otimes \bar{k}, Z\Omega^2_{X\otimes\bar{k}}) \simeq \mathrm{H}^0(X, Z\Omega^2_X) \otimes_k \bar{k}$$

où l'on a posé $Z\Omega^2_X = \mathrm{Ker}(d_X\colon \Omega^2_X \to \Omega^3_X)$. On en déduit que l'application polynomiale

$$\mathrm{H}^0(X, \Omega^2_X) \ni \varphi \mapsto \varphi^{\wedge m} \in \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X) \simeq k$$

où $2m = \dim(X)$ n'est pas identiquement nulle puisqu'elle ne l'est pas après extension des scalaires à $\bar{k}$ et que sa rectriction à $\mathrm{H}^0(X, Z\Omega^2_X)$ ne l'est pas non plus. Il existe donc une 2-forme fermée $\varphi \in \mathrm{H}^0(X, \Omega^2_X)$ non dégénérée en tout point.

2.2. Théories Cohomologiques

On se donne un corps k de caractéristique $p \geq 0$, une variété X propre sur k et on fixe une clôture algébrique $\bar{k}$ de k.

On se donne un entier premier $\ell \neq p$. On note $\mathrm{H}^\bullet_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}_\ell) := \varprojlim \mathrm{H}^\bullet_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})$ et $\mathrm{H}^\bullet_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}_\ell) := \mathrm{H}^\bullet_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}_\ell) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell$ les groupes de cohomologie ℓ-adique à valeurs dans $\mathbf{Z}_\ell$ et $\mathbf{Q}_\ell$ respectivement.

On suppose k parfait et $p > 0$. On note $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de k, K_0 son corps des fractions et $\mathrm{H}^\bullet_{\text{cris}}(X/W)$ la cohomologie cristalline de X.

On sait que lorsque X est projective et lisse sur k (comme ci-dessus),

$$\mathrm{H}^\bullet_{\text{ét}}(X \otimes \bar{k}, \mathbf{Q}_\ell) \quad \text{et} \quad \mathrm{H}^\bullet_{\text{cris}}(X/W) \otimes_W K_0$$

sont des algèbres anti-commutatives graduées de dimensions finies sur $\mathbf{Q}_\ell$ et K_0 respectivement et qu'on a une formule de Künneth, une dualité de Poincaré, des théorèmes de Lefschetz faible et fort et enfin des applications cycle.

On a également des structures supplémentaires sur chacun de ces groupes de cohomologie. On suppose k fini de cardinal $q = p^a$ ($a > 0$). On note $F_{\text{abs}} \colon X \to X$ le Frobenius absolu. Il agit par fonctorialité sur $\mathrm{H}^\bullet_{\text{cris}}(X/W)$; F^a_{abs} agit linéairement sur $\mathrm{H}^\bullet_{\text{cris}}(X/W)$ et $\mathrm{H}^\bullet_{\text{cris}}(X/W) \otimes_W K_0$. On notera $K_0(r)$ pour $r \in \mathbf{Z}$ le K_0 espace vectoriel de dimension 1 sur K_0 sur lequel F^a_{abs} agit par multiplication par q^r et pour tout $K_0[F^a_{\text{abs}}]$-module V, on note $V(r) := V \otimes_{K_0} K_0(r)$.

On suppose k quelconque (et $\ell \neq p$) ; le groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ agit sur $\mathrm{H}^\bullet_{\text{ét}}(X \otimes \bar{k}, \mathbf{Z}_\ell)$ et $\mathrm{H}^\bullet_{\text{ét}}(X \otimes \bar{k}, \mathbf{Q}_\ell)$ par transport de structures. On considère les $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$-modules $\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}(1) := \mu_{\ell^n}(\bar{k})$, $\mathbf{Z}_\ell(1) := \varprojlim \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}(1)$, et $\mathbf{Q}_\ell(1) := \mathbf{Z}_\ell(1) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell$. On note aussi, pour $r \geq 1$, $\mathbf{Z}_\ell(r) := \mathbf{Z}_\ell(1)^{\otimes r}$ (resp. $\mathbf{Q}_\ell(r) := \mathbf{Q}_\ell(1)^{\otimes r}$), et enfin $V(r) := V \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Z}_\ell(r)$ (resp. $V(r) := V \otimes_{\mathbf{Q}_\ell} \mathbf{Q}_\ell(r)$) pour tout $\mathbf{Z}_\ell[\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)]$-module (resp. $\mathbf{Q}_\ell[\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)]$-module) V.

On suppose k quelconque. On note $\mathrm{H}^\bullet_{\text{dR}}(X, k)$ la cohomologie de de Rham de X sur k, c'est-à-dire l'hypercohomologie (pour la topologie de Zariski) du complexe de de Rham $\Omega^\bullet_X$.

On note enfin $\mathrm{H}^\bullet(X, \mathcal{F})$ la cohomolgie du faisceau de groupes abéliens $\mathcal{F}$ pour la topologie de Zariski.

2.3. Invariant de Hasse–Witt

Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$ et σ l'automorphisme de Frobenius de k. Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur k et u un endomorphsime σ-linéaire de V. On a une décomposition en somme directe $V = V_{\text{ss}} \oplus V_{\text{nil}}$ où $V_{\text{ss}} = \bigcap_{i \geq 0} u^i(V)$ et $V_{\text{nil}} = \bigcup_{i \geq 0} \mathrm{Ker}(u^i)$; les espaces vectoriels V_{ss} et V_{nil} sont u-stables, la restriction de u à V_{ss} est bijective et sa restriction à V_{nil} est nilpotente. On appelle *rang stable* de u la dimension de V_{ss} sur k. On remarque que le rang stable de V sur k est égal au rang stable de $V \otimes \bar{k}$ sur $\bar{k}$.

Soit X une variété algébrique de dimension d propre sur k. On note $F_{\text{abs}} \colon X \to X$ le morphisme de Frobenius absolu. On appelle *invariant de Hasse–Witt* de X (sur k) le rang stable de F_{abs} agissant sur $\mathrm{H}^d(X, \mathcal{O}_X)$. On note $\bar{\sigma}$ l'automorphisme de Frobenius de $\bar{k}$ et $\bar{F}_{\text{abs}} \colon X \otimes \bar{k} \to X \otimes \bar{k}$ le Frobenius absolu. On a bien sûr un isomophisme $\mathrm{H}^d(X \otimes \bar{k}, \mathcal{O}_{X \otimes \bar{k}}) \simeq \mathrm{H}^d(X, \mathcal{O}_X) \otimes_k \bar{k}$ tel que $\bar{F}_{\text{abs}} = F_{\text{abs}} \otimes \bar{\sigma}$, et l'invariant de Hasse–Witt de X (sur k) est donc égal à celui de $X \otimes \bar{k}$ (sur $\bar{k}$).

3. Quelques Préliminaires

On considère dans tout ce paragraphe un corps parfait k de caractéristique $p > 0$.

3.1. Opération de Cartier

Soit X une variété algébrique lisse sur k de dimension $\dim(X) = d$. On note σ l'automorphisme de Frobenius de k et $F_{\text{abs}} \colon X \to X$ le morphisme de Frobenius absolu. On rappelle qu'il existe un unique isomorphisme σ-linéaire de faisceaux d'algèbres graduées

$$C^{-1}\colon \bigoplus_{i\geq 0}\Omega_X^i \to \bigoplus_{i\geq 0}\mathcal{H}^i(\Omega_X^\bullet)$$

tel que $C^{-1}(s) = s^p$ si $s \in \mathcal{O}_X$ et $C^{-1}(d_X s)$ soit la classe de $s^{p-1}d_X s$ ($\mathcal{H}^i(\Omega_X^\bullet)$ désigne la cohomologie en degré i du complexe $\Omega_X^\bullet$) ; C est appelé l'opérateur de Cartier.

On note $B\Omega_X^i = d_X\Omega_X^{i-1}$ et $Z\Omega_X^i = \mathrm{Ker}(d_X\colon \Omega_X^i \to \Omega_X^{i+1})$ pour tout $i \in \{0,\dots,\dim(X)\}$; ce sont des faisceaux de groupes abéliens (d_X n'est pas $\mathcal{O}_X$-linéaire). On note encore C l'application induite par l'opérateur de Cartier

$$Z\Omega_X^i \to Z\Omega_X^i/B\Omega_X^i = \mathcal{H}^i(\Omega_X^\bullet) \to \Omega_X^i.$$

On rappelle enfin que l'application k-linéaire

$$F_{\mathrm{abs}*}Z\Omega_X^d = F_{\mathrm{abs}*}\omega_X = F_{\mathrm{abs}*}F_{\mathrm{abs}}^!\omega_X \to \omega_X$$

est une "application trace" dans la dualité relative au morphisme (fini) F_{abs} (voir par exemple [BrKu, Prop. 1.3.7]).

LEMME 5. *Soit X une variété algébrique de dimension $d = 2m \geq 2$ propre et lisse sur k. On suppose qu'il existe une 2-forme fermée φ telle qu'on ait $\mathrm{H}^0(X,\Omega_X^2) = k\cdot\varphi$ et $\varphi^{\wedge m} \neq 0$.*

(1) *Si $C(\varphi) \neq 0$ alors l'invariant de Hasse–Witt de X est non nul.*
(2) *On suppose de plus $\mathrm{H}^0(X,\omega_X) = k\cdot\varphi^{\wedge m}$. On a alors $C(\varphi) \neq 0$ si et seulement si l'invariant de Hasse–Witt de X est non nul.*

Démonstration. On sait (voir [BrKu, Rem. 1.3.9(ii)]) que l'application

$$\mathrm{H}^0(X,\omega_X) \simeq \mathrm{H}^0(X, F_{\mathrm{abs}*}F_{\mathrm{abs}}^!\omega_X) \to \mathrm{H}^0(X,\omega_X)$$

induite par "l'application trace" est duale de l'application de Hasse–Witt

$$F_{\mathrm{abs}}^*\colon \mathrm{H}^d(X,\mathcal{O}_X) \to \mathrm{H}^d(X,\mathcal{O}_X).$$

On en déduit en particulier que l'invariant de Hasse–Witt de X est non nul si et seulement si l'opérateur de Cartier C en degré d n'est pas nilpotent. L'invariant de Hasse–Witt de X est donc non nul s'il existe une forme non nulle ω sur X de degré d telle que $C(\omega) = \mu\omega$ avec $\mu \neq 0$ et inversement si on suppose $\dim_k(\mathrm{H}^0(X,\omega_X)) = 1$.

On a $C(\varphi) = \lambda\varphi$, pour un scalaire $\lambda \in k$ convenable. On a donc

$$C(\underbrace{\varphi\wedge\cdots\wedge\varphi}_{\text{m facteurs}}) = \underbrace{C(\varphi)\wedge\cdots\wedge C(\varphi)}_{\text{m facteurs}} = \lambda^m\underbrace{\varphi\wedge\cdots\wedge\varphi}_{\text{m facteurs}}.$$

On conclut maintenant facilement. □

On montre avec des arguments analogues le résultat suivant.

LEMME 6. *Soit X une variété algébrique symplectique propre sur k, de dimension $d = 2m$. On suppose que toutes les 2-formes globales sur X sont fermées.*

Alors l'invariant de Hasse–Witt de X est non nul si et seulement si l'application $\mathrm{H}^0(X, F_{\mathrm{abs}*}Z\Omega^2_X) \to \mathrm{H}^0(X, \Omega^2_X)$ *induite par l'opérateur de Cartier est surjective.*

3.2. Scindage de Frobenius

Soit X une variété algébrique sur k. On note encore $F_{\mathrm{abs}}\colon X \to X$ le morphisme de Frobenius absolu. On dit, suivant Mehta et Ramanathan [MehR], que l'application de Frobenius est scindée (on dit que X est "Frobenius split" en anglais) si l'homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules $F^{\sharp}_{\mathrm{abs}}\colon \mathcal{O}_X \to F_{\mathrm{abs}*}\mathcal{O}_X$ l'est, c'est-à-dire, s'il existe un morphisme $\mathcal{O}_X$-lineaire $\varphi\colon F_{\mathrm{abs}*}\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ tel que $\varphi \circ F^{\sharp}_{\mathrm{abs}}$ soit l'application identité de $\mathcal{O}_X$.

On termine ce paragraphe avec un énoncé dont on ne se servira pas par la suite faisant le lien entre l'existence d'un scindage de Frobenius et l'invariant de Hasse–Witt de X.

LEMME 7. *Soit X une variété symplectique irréductible propre sur k de dimension $d = 2m$. Soit $\varphi \in \mathrm{H}^0(X, \Omega^2_X) \setminus \{0\}$. On a alors $C(\varphi) \neq 0$ si et seulement si l'application de Frobenius est scindée.*

Démonstration. On sait que l'application $\mathcal{O}_X$-linéaire

$$\mathcal{O}_X \to F_{\mathrm{abs}*}\mathcal{O}_X$$

est scindée si et seulement si "l'application trace"

$$F_{\mathrm{abs}*}Z\Omega^d_X = F_{\mathrm{abs}*}\omega_X \to \omega_X$$

l'est (voir par exemple [BrKu, Prop. 1.3.7]) ; c'est encore équivalent au fait que l'application

$$\mathrm{H}^0(X, F_{\mathrm{abs}*}Z\Omega^m_X) = \mathrm{H}^0(X, F_{\mathrm{abs}*}\Omega^m_X) \to \mathrm{H}^0(X, \Omega^m_X)$$

soit non nulle puisque $\varphi^{\wedge m}$ est un générateur de ω_X en tout point et k est un corps parfait. On termine comme dans la démonstration du Lemme 5. □

4. Sur un Corps Fini

Soit k un corps fini de caractéristique p à $q = p^a$ éléments, où a est un entier naturel non nul. On note $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de k, $K_0 = W[1/p]$ son corps des fractions et σ l'automorphisme de Frobenius de W. Soit X une variété sur k. Le morphisme de Frobenius absolu $F_{\mathrm{abs}}\colon X \to X$ induit par transport de structures un endomorphisme σ-linéaire de la cohomologie cristalline $\mathrm{H}^{\bullet}_{\mathrm{cris}}(X/W)$ noté F_{cris}.

On rappelle qu'il existe une "W-algèbre différentielle graduée strictement anti-commutative" $W\Omega^{\bullet}_X$ (dépendant fonctoriellement de X) appelée complexe de de Rham–Witt dont la cohomologie calcule la cohomologie cristalline $\mathrm{H}^{\bullet}_{\mathrm{cris}}(X/W)$ [I]. On en déduit l'existence d'une suite spectrale, dite suite spectrale des pentes,

$$E_1^{ij} = \mathrm{H}^j(X, W\Omega^i_X) \implies \mathrm{H}^{i+j}_{\mathrm{cris}}(X/W)$$

où, pour tout $i \geq 0$, les K_0-espaces vectoriels $\mathrm{H}^j(X, W\Omega_X^i) \otimes_W K_0$ sont de dimensions finies (voir [I, Thm. II.2.13]) et $\mathrm{H}^0(X, W\Omega_X^i)$ est un W-module libre de type fini (voir [I, Cor. II.2.17]). Le Frobenius absolu de X induit un endomorphisme (de W-algèbre différentielle graduée) de $W\Omega_X^\bullet$ noté également F_{cris}. La suite spectrale des pentes dégénère en E_1 modulo torsion (voir [I, Thm. II.3.2]).

On dit, suivant Illusie et Raynaud [IRay], que X est de Hodge–Witt en degré s si $\mathrm{H}^j(X, W\Omega_X^i)$ est de type fini sur W pour $i + j = s$.

Lemme 8. *Soit X une variété algébrique projective et lisse sur k de dimension d. On suppose $\mathrm{H}^\bullet_{\text{cris}}(X/W)$ sans torsion et on suppose que la suite spectrale de Hodge $E_1^{ij} = \mathrm{H}^j(X, \Omega_X^i) \Longrightarrow \mathrm{H}^{i+j}_{\text{dR}}(X/k)$ dégénère en E_1. Soit $s \in \{0, \ldots, d\}$. On suppose aussi que l'une des valeurs propres de l'endomorphisme K_0-linéaire $F^a_{\text{cris}} \otimes \sigma$ de $\mathrm{H}^s_{\text{cris}}(X/W) \otimes_W K_0$ a une valuation p-adique nulle.*

(1) *Si X est de Hodge–Witt en degré s alors il existe $\varphi \in \mathrm{H}^0(X, Z\Omega_X^s)$ telle que $C(\varphi) \neq 0$.*
(2) *Si $h^{0,1} = h^{0,3} = 0$ et $h^{0,2} = 1$ alors X est de Hodge–Witt en degré 2.*

Démonstration. Si (M, F) est un F-isocristal sur k et $\lambda \in \mathbf{Q}$, on note M_λ le plus grand sous-F-isocristal de M de pente λ et, pour $I \subset \mathbf{Q}$, on note $M_I = \bigoplus_{\lambda \in I} M_\lambda$ (voir par exemple [I, II.3.4]).

On note $\bar{k}$ une clôture algébrique de k, $W(\bar{k})$ l'anneau des vecteurs de Witt de $\bar{k}$, $K_0(\bar{k}) = W(\bar{k})[1/p]$ son corps des fractions et $\bar{\sigma}$ l'automorphisme de Frobenius de $W(\bar{k})$. On note enfin $\bar{F}_{\text{cris}}$ l'endomorphisme de $\mathrm{H}^\bullet_{\text{cris}}(X \otimes \bar{k}/W(\bar{k}))$ induit par le Frobenius absolu de $X \otimes \bar{k}$. On a alors un isomorphisme canonique $\mathrm{H}^\bullet_{\text{cris}}(X \otimes \bar{k}/W(\bar{k})) \simeq \mathrm{H}^\bullet_{\text{cris}}(X/W) \otimes_W W(\bar{k})$ tel que $\bar{F}_{\text{cris}} = F_{\text{cris}} \otimes \bar{\sigma}$ car $\mathrm{H}^\bullet_{\text{cris}}(X/W)$ est sans torsion. On rappelle que pour tout entier $i \geq 0$, les pentes du F-cristal $(\mathrm{H}^i_{\text{cris}}(X/W), F_{\text{cris}})$ sur k sont, par définition, les pentes du F-cristal $(\mathrm{H}^i_{\text{cris}}(X \otimes \bar{k}/W(\bar{k})), \bar{F}_{\text{cris}})$ sur $\bar{k}$ (où la valuation est normalisée par la condition que la valuation p-adique de $q = p^a$ est 1).

On considère le F-isocristal $(M = \mathrm{H}^s_{\text{cris}}(X/W) \otimes_W K_0, F = F_{\text{cris}} \otimes \sigma)$. On rappelle qu'alors les pentes du F-isocristal M sont les valuations p-adiques des valeurs propres de l'endomorphisme $F^a_{\text{cris}} \otimes \sigma$ de $\mathrm{H}^s_{\text{cris}}(X/W) \otimes_W K_0$ (voir [Man]). On a donc

$$\dim(M_{[0]}) \geq 1$$

par hypothèse.

On note η la classe d'une section hyperplane de X dans $\mathrm{H}^2_{\text{cris}}(X/W) \otimes_W K_0$. On déduit du théorème de Lefschetz fort [KMe] et du théorème de dualité de Poincaré [Be2] que l'application

$$\begin{aligned} M \otimes M &\to \mathrm{H}^{2d}_{\text{cris}}(X/W) \otimes_W K_0(s-d) \simeq K_0(s), \\ \alpha \otimes \beta &\mapsto \alpha \cdot \beta \cdot \eta^{d-s} \end{aligned}$$

induit un isomorphisme (dépendant du choix de η)

$$\mathrm{Hom}_{K_0}(M, K_0) \simeq M(-s)$$

compatible à l'action de Frobenius. On a donc

$$\dim(M_{[s]}) = \dim(M_{[0]}) \geq 1.$$

On en déduit aussi que les pentes de M sont dans $[0, s]$ (voir également [Be1]).

On peut maintenant démontrer la première assertion. On suppose donc X de Hodge–Witt en degré s. On a, d'après [IRay, Thm. IV.4.5], une décomposition (canonique)

$$\mathrm{H}^s_{\mathrm{cris}}(X/W) \simeq \bigoplus_{i+j=s} \mathrm{H}^j(X, W\Omega^i_X),$$

en particulier, le F-cristal $(\mathrm{H}^0(X, W\Omega^s_X), F_{\mathrm{cris}})$ est un facteur direct de $(\mathrm{H}^s_{\mathrm{cris}}(X/W), F_{\mathrm{cris}})$.

On sait également que l'endomorphisme (de W-algèbre différentielle graduée) de $W\Omega^\bullet_X$ induit par le Frobenius F_{abs} est "divisible" par p^i sur $W\Omega^i_X$ ($i \geq 0$) d'après [I, I.2.19]. On en déduit que le F-isocristal $(\mathrm{H}^0(X, W\Omega^s_X) \otimes_W K_0, F_{\mathrm{cris}} \otimes \sigma)$ est pur de pente s puis que le F-isocristal $\big(\mathrm{H}^0(X, W\Omega^s_X) \otimes_W K_0, \frac{1}{p^s} F_{\mathrm{cris}} \otimes \sigma\big)$ est pur de pente 0.

Le F-cristal (sur $\bar{k}$) $\big(\mathrm{H}^0(X \otimes \bar{k}, W\Omega^s_{X\otimes\bar{k}}) = \mathrm{H}^0(X, W\Omega^s_X) \otimes_W W(\bar{k}), \frac{1}{p^s} F_{\mathrm{cris}} \otimes \bar{\sigma}\big)$ est donc certainement un cristal unité (voir [K1, 2.1]) et possède une $W(\bar{k})$-base $(W\bar{\varphi}_t)_{t\in T}$ telle que $\frac{1}{p^s} F_{\mathrm{cris}}(W\bar{\varphi}_t) = W\bar{\varphi}_t$ pour tout $t \in T$ où $W\bar{\varphi}_t \in \mathrm{H}^0(X \otimes \bar{k}, W\Omega^s_{X\otimes\bar{k}})$. On note au passage que T est non vide puisque $\dim(M_{[s]}) \geq 1$ en utilisant [I, II.3.5].

La projection $W\Omega^\bullet_{X\otimes\bar{k}} \to \Omega^\bullet_{X\otimes\bar{k}}$ induit un morphisme de la suite spectrale des pentes

$$E_1^{ij} = \mathrm{H}^j(X \otimes \bar{k}, W\Omega^i_{X\otimes\bar{k}}) \implies \mathrm{H}^{i+j}_{\mathrm{cris}}(X \otimes \bar{k}/W(\bar{k}))$$

vers la suite spectrale de Hodge

$$E_1^{ij} = \mathrm{H}^j(X \otimes \bar{k}, \Omega^i_{X\otimes\bar{k}}) \implies \mathrm{H}^{i+j}_{\mathrm{dR}}(X \otimes \bar{k}/\bar{k}).$$

On sait, par hypothèse, que la suite spectrale de Hodge dégénère en E_1; en particulier, toutes les formes différentielles globales sur X ou $X \otimes \bar{k}$ sont fermées. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^0(X \otimes \bar{k}, W\Omega^s_{X\otimes\bar{k}}) \otimes \bar{k} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^s_{\mathrm{cris}}(X \otimes \bar{k}/W(\bar{k})) \otimes \bar{k} \arrow[d] \\
\mathrm{H}^0(X \otimes \bar{k}, Z\Omega^s_{X\otimes\bar{k}}) \arrow[r] & \mathrm{H}^s_{\mathrm{dR}}(X \otimes \bar{k}/\bar{k})
\end{tikzcd}$$

où, la flèche verticale de droite, déduite de la suite exacte des coefficients universels (voir [Be2, VII, 1.1.11]), est un isomorphisme. On sait aussi que la flèche horizontale du haut est injective puisque $\mathrm{H}^0(X \otimes \bar{k}, W\Omega^s_{X\otimes\bar{k}})$ est un facteur direct de $\mathrm{H}^s_{\mathrm{cris}}(X \otimes \bar{k}/W(\bar{k}))$. On obtient ainsi une flèche injective

$$\mathrm{H}^0(X \otimes \bar{k}, W\Omega^s_{X\otimes\bar{k}}) \otimes \bar{k} \hookrightarrow \mathrm{H}^0(X \otimes \bar{k}, Z\Omega^s_{X\otimes\bar{k}}).$$

On en déduit que, pour tout $t \in T$, l'image $\bar{\varphi}_t$ de $W\bar{\varphi}_t$ par

$$\mathrm{H}^0(X\otimes \bar{k}, W\Omega^s_{X\otimes\bar{k}}) \to \mathrm{H}^0(X\otimes \bar{k}, W\Omega^s_{X\otimes\bar{k}})\otimes \bar{k} \\ \to \mathrm{H}^0(X\otimes \bar{k}, Z\Omega^s_{X\otimes\bar{k}}) = \mathrm{H}^0(X\otimes \bar{k}, \Omega^s_{X\otimes\bar{k}})$$

est non nulle.

On rappelle enfin que, par choix de $W\bar{\varphi}_t$, on a $\frac{1}{p^s}F_{\mathrm{cris}}(W\bar{\varphi}_t) = W\bar{\varphi}_t$. Or $\frac{1}{p^s}F_{\mathrm{cris}}$ relève l'opérateur C^{-1}, autrement dit le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^0(X\otimes \bar{k}, W\Omega^s_{X\otimes\bar{k}}) \arrow[r, "\frac{1}{p^s}F_{\mathrm{cris}}"] \arrow[d] & \mathrm{H}^0(X\otimes \bar{k}, W\Omega^s_{X\otimes\bar{k}}) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^0(X\otimes \bar{k}, \Omega^s_{X\otimes\bar{k}}) \arrow[r] \arrow[d, "C^{-1}"'] & \mathrm{H}^0(X\otimes \bar{k}, \Omega^s_{X\otimes\bar{k}}/B\Omega^s_{X\otimes\bar{k}}) \\
\mathrm{H}^0(X\otimes \bar{k}, \mathcal{H}^s(\Omega^\bullet_X)) \arrow[r, equal] & \mathrm{H}^0(X\otimes \bar{k}, Z\Omega^s_{X\otimes\bar{k}}/B\Omega^s_{X\otimes\bar{k}}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

est commutatif (voir [I, Prop. 3.3]). On a donc $C(\bar{\varphi}_t)\neq 0$ pour tout $t\in T$. On en déduit facilement qu'il existe $\varphi\in \mathrm{H}^0(X, Z\Omega^s_X)$ telle que $C(\varphi)\neq 0$.

On suppose maintenant $s=2$ et $h^{0,1}=h^{0,3}=0$ et $h^{0,2}=1$. On cherche à montrer que $\mathrm{H}^j(X, W\Omega^i_X)$ est de type fini sur W pour $i+j=2$. On le sait pour $(i,j)=(2,0)$ d'après [I, Cor. II.2.17] et pour $(i,j)=(1,1)$ d'après [IRay, Cor. II.3.11] et [I, Thm. II.2.7].

On rappelle que la suite spectrale des pentes fournit des isomorphismes de F-isocristaux (voir [I, Cor. II.3.5])

$$(\mathrm{H}^j(X, W\Omega^i_X)\otimes_W K_0,\ F_{\mathrm{cris}}\otimes\sigma) = (\mathrm{H}^{i+j}_{\mathrm{cris}}(X/W)\otimes_W K_{0_{[i,i+1[}},\ F_{\mathrm{cris}}\otimes\sigma)$$

et on a donc

$$(\mathrm{H}^2(X, W\mathcal{O}_X)\otimes_W K_0,\ F_{\mathrm{cris}}\otimes\sigma) = ((\mathrm{H}^2_{\mathrm{cris}}(X/W)\otimes_W K_0)_{[0,1[},\ F_{\mathrm{cris}}\otimes\sigma).$$

En particulier,

$$\dim_{K_0}(\mathrm{H}^2(X, W\mathcal{O}_X)\otimes_W K_0)\geq 1.$$

On sait enfin que le foncteur de Brauer formel $\widehat{\mathrm{Br}}_{X/k}$ est représentable par un groupe formel d'après [AMa, Cor. II.4.2] et l'hypothèse $h^{0,1}=0$, qu'il est lisse car $h^{0,3}=0$ et de dimension $h^{0,2}=1$. On sait aussi que $\mathrm{H}^2(X, W\mathcal{O}_X)$ en est le module de Cartier (voir [AMa, Cor. II.4.3]) et que $\dim_{K_0}(\mathrm{H}^2(X, W\mathcal{O}_X)\otimes_W K_0)$ est la hauteur de son plus grand quotient p-divisible. On en déduit en particulier que le groupe de Brauer formel de X/k est p-divisible et donc que $\mathrm{H}^2(X, W\mathcal{O}_X)$ est sans torsion, ce qui termine la démonstration du lemme. □

5. La Méthode d'Ogus, Bogomolov, et Zarhin

On considère un corps de nombres K et on fixe une clôture algébrique $\bar{K}$ de K. Soit ℓ un nombre premier.

Soit v une place finie de K. Le corps résiduel k_v est un corps fini à $N_v = p_v^{a_v}$ éléments où p_v est la caractéristique du corps k_v et a_v est le degré de l'extension k_v sur $\mathbf{F}_p$. Si V est un $\mathbf{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie, v est une place de K et $\rho\colon \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to \mathrm{GL}(V))$ est une repésentation non ramifiée en v, on note $F_{v,\rho} \in \mathrm{GL}(V)$ un “élément de Frobenius” (ou plus exactement la classe de conjugaison correspondante) donné par $a \mapsto a^{N_v}$.

On rappelle l'énoncé (d'un cas particulier) de la conjecture de semi-simplicité en degré 2 (voir [K2; T2]).

CONJECTURE 9 (Conjecture de semi-simplicité). *Soit X une variété propre et lisse sur K. On considère la représentation $\rho\colon \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to \mathrm{GL}(\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X \otimes \bar{K}, \mathbf{Q}_\ell))$. Il existe un ensemble fini $\mathcal{V}$ de places ultramétriques de K tels que, si v est une place finie de K et $v \notin \mathcal{V}$ alors ρ est non ramifiée en v et $F_{v,\rho}$ est semi-simple.*

On aura besoin dans la suite de vérifier que certaines représentations du groupe $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ ne sont pas triviales. On donne deux critères : le premier ne sera pas utilisé dans la suite de ce texte, le second m'a été communiqué par le referee.

On rappelle dans un premier temps l'énoncé de la conjecture de Tate en degré 2 [T1; T2] sur les corps de nombres.

CONJECTURE 10 (Tate). *Soit X une variété projective et lisse sur K, géométriquement intègre. L'application cycle induit une surjection*

$$\mathrm{NS}(X \otimes \bar{K})) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_\ell \twoheadrightarrow \bigcup_U \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X \otimes \bar{K}, \mathbf{Q}_\ell)(1)^U$$

où U parcourt l'ensemble des sous-groupes ouverts de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$.

On a le résultat facile suivant.

LEMME 11. *Soit X une variété projective et lisse sur K, géométriquement intègre. On suppose que la conjecture de Tate est vraie pour X. On suppose enfin*

$$\mathrm{rang}(\mathrm{NS}(X \otimes \bar{K})) < \dim_{\mathbf{Q}_\ell}(\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X \otimes \bar{K}, \mathbf{Q}_\ell)).$$

On note G l'image du groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ *par la représentation ℓ-adique* $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to \mathrm{GL}(\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X \otimes \bar{K}, \mathbf{Q}_\ell)(1))$. *Alors le groupe de Lie ℓ-adique G est de dimension ≥ 1.*

Démonstration. On suppose par l'absurde que G est un groupe fini. Il existe donc une extension Galoisienne finie $K \subset L \subset \bar{K}$ telle que le groupe de Galois absolu $U := \mathrm{Gal}(\bar{K}/L)$ agisse trivialement sur $\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X \otimes \bar{K}, \mathbf{Q}_\ell)(1)$. On a alors

$$\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X \otimes \bar{K}, \mathbf{Q}_\ell)(1)^U = \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X \otimes \bar{K}, \mathbf{Q}_\ell)(1)$$

et l'application cycle induit donc une surjection

$$\mathrm{NS}(X \otimes \bar{K})) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_\ell \twoheadrightarrow \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X \otimes \bar{K}, \mathbf{Q}_\ell)(1).$$

On a obtenu la contradiction cherchée. $\square$

On note $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K. On considère une variété X propre et lisse sur K. Soit $f\colon \mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ un modèle entier de X, autrement dit, $\mathcal{X}$ est un schéma intègre et $\mathcal{X} \otimes K$ est isomorphe à X sur K. Soit $\mathcal{V}$ un ensemble fini de places non archimédiennes de K tel que f soit lisse au-dessus de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K[\mathcal{V}^{-1}])$. On considère la représentation $\rho\colon \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to \mathrm{GL}(\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X \otimes \bar{K}, \mathbf{Q}_\ell))$. On fixe une place finie v de K, $v \notin \mathcal{V}$, et on note $F_{\text{abs},v}$ le Frobenius absolu de $\mathcal{X}_v$. On rappelle que, par le théorème de changement de base lisse [SGA4, Exp. XVI] et [SGA5, Exp. XV], les valeurs propres du "Frobenius géométrique" $F_{v,\rho}^{-1}$ sont aussi les valeurs propres de $\mathrm{Id}_{\mathcal{X}_v} \otimes F_v$ agissant sur $\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(\mathcal{X}_v \otimes \bar{k}_v, \mathbf{Q}_\ell)$, où F_v est le Frobenius de $\bar{k}_v$. Le polynôme $\det(\mathrm{Id}_{\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(\mathcal{X}_v \otimes \bar{k}_v, \mathbf{Q}_\ell)} - F_{v,\rho}^{-1} t)$ est à coefficients entiers (indépendants de $\ell \neq p_v$) d'après [D] : les valeurs propres de $F_{v,\rho}^{-1}$ sont donc des entiers algébriques.

On a aussi le critère suivant.

LEMME 12. *Soit X une variété projective et lisse sur K, géométriquement intègre. On suppose $h^{2,0}(X) \neq 0$. On suppose aussi que la conjecture de semi-simplicité est vraie pour X. On note G l'image du groupe de Galois absolu* $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ *par la représentation ℓ-adique* $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to \mathrm{GL}(\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X \otimes \bar{K}, \mathbf{Q}_\ell)(1))$. *Alors le groupe de Lie ℓ-adique G est de dimension* ≥ 1.

Démonstration. On suppose par l'absurde que G est un groupe fini. Il existe donc une extension Galoisienne finie $K \subset L \subset \bar{K}$ telle que le groupe de Galois absolu $U := \mathrm{Gal}(\bar{K}/L)$ agisse trivialement sur $\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X \otimes \bar{K}, \mathbf{Q}_\ell)(1)$. Quitte à remplacer X par $X \otimes L$, on peut toujours supposer que $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ agit trivialement sur $\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X \otimes \bar{K}, \mathbf{Q}_\ell)(1)$. Cette propriété est indépendante de ℓ puisque les polynômes caractéristiques des éléments de Frobenius le sont. On en déduit que pour toute place finie (non ramifiée dans la représentation considérée) v de K, la représentation de $\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$ sur $\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X \otimes \bar{K}, \mathbf{Q}_{p_v})(1)$ est triviale, où K_v désigne le complété de K en v et $\bar{K}_v$ une clôture algébrique de K_v. On rappelle que le choix d'un plongement de $\bar{K}$ dans $\bar{K}_v$ induit une injection $\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v) \subset \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ et un isomorphisme equivariant de $\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X \otimes \bar{K}, \mathbf{Q}_{p_v})(1)$ sur $\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X \otimes \bar{K}_v, \mathbf{Q}_{p_v})(1)$ puisque les groupes de cohomologie p_v-adique sont invariants par extension des scalaires d'un corps algébriquement clos à un autre corps algébriquement clos. D'après [F], si X a bonne réduction en v et si $\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$ agit trivialment sur $\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X \otimes \bar{K}_v, \mathbf{Q}_{p_v})(1)$ alors la filtration de Hodge sur $\mathrm{H}^2_{\text{dR}}(X \otimes K_v, K_v)$ est triviale. On obtient la contradiction cherchée puisque puisque $h^{2,0}(X) \neq 0$ par hypothèse. □

Le résultat suivant est essentiellement dû à Ogus [DMOS, Exp. VI] d'une part, Bogomolov et Zahrin [BoZ] d'autre part.

LEMME 13. *Soit X une variété projective et lisse sur K, géométriquement intègre. On suppose la conjecture de semi-simplicité vraie pour X. On suppose également $\ell > 2b_2$ où $b_2 := \dim_{\mathbf{Q}}(\mathrm{H}^2_{\mathrm{B}}(X \otimes \mathbf{C}, \mathbf{Q})$ et on note ρ la représentation*

$$\mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to \mathrm{GL}(\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X \otimes \bar{K}, \mathbf{Q}_\ell)).$$

On suppose enfin que le groupe $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ *n'agit pas sur* $\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X \otimes \bar{K}, \mathbf{Q}_\ell)(1)$ *via un de ses quotients finis.*

Il existe un ensemble Σ *de places ultramétriques de* K *de densité* > 0 *tel que, si* $v \in \Sigma$ *alors*

- k_v *est un corps premier de caractéristique* $p_v \neq \ell$,
- ρ *est non ramifée en* v,
- *l'une des valeurs propres du "Frobenius géométrique"* $F_{v,\rho}^{-1}$ *a une valuation* p_v*-adique nulle.*

On peut également supposer la densité de Σ *égale à 1 quitte à remplacer* K *par une extension finie* L *de* K *convenable.*

Démonstration. On note $\chi_\ell\colon \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to \mathbf{Z}_\ell^*$ le caractère cyclotomique ℓ-adique ; l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ sur le module de Tate ℓ-adique $\mathbf{Z}_\ell(1)$ est induite par χ_ℓ.

On considère les représentations

$$\rho\colon \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to \mathrm{GL}(\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X \otimes \bar{K}, \mathbf{Z}_\ell)) \subset \mathrm{GL}(\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X \otimes \bar{K}, \mathbf{Q}_\ell))$$

et

$$\rho \otimes \chi_\ell\colon \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to \mathrm{GL}(\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X \otimes \bar{K}, \mathbf{Z}_\ell)(1)) \subset \mathrm{GL}(\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X \otimes \bar{K}, \mathbf{Q}_\ell)(1)).$$

On rappelle que si v est une place de K qui n'est pas divisible par ℓ alors χ_ℓ est non ramifié en v et "$F_{v,\rho\otimes\chi_\ell} = p_v^{a_v} F_{v,\rho}$".

On considère un ensemble $\mathcal{V}$ de places ultramétriques de K tel que, si v est une place finie de K et $v \notin \mathcal{V}$ alors ρ est non ramifiée en v et $F_{v,\rho}$ est semi-simple.

On peut toujours supposer, quitte à élargir $\mathcal{V}$, que si v est une place finie de K et $v \notin \mathcal{V}$ alors $p_v \neq \ell$. On peut également supposer, d'après la discussion ci-dessus, que les valeurs propres de $F_{v,\rho}^{-1}$ sont des entiers algébriques.

On considère une extension Galoisienne finie L de K contenant toutes les racines ℓ-ième de l'unité telle que la représentation induite par ρ

$$\mathrm{Gal}(\bar{K}/L) \to \mathrm{GL}(\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X \otimes \bar{K}, \mathbf{Z}_\ell) \otimes (\mathbf{Z}_\ell/\ell\mathbf{Z}_\ell))$$

soit triviale.

On sait d'après le théorème de densité de Čebotarev que l'ensemble Σ_1 des places finies de K de corps résiduels premiers et totalement décomposées dans L est de densité > 0. On sait aussi, d'aprés [Se, Thm. 10] en utilisant l'hypothèse que le groupe $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ n'agit pas sur $\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X \otimes \bar{K}, \mathbf{Q}_\ell)(1)$ via un de ses quotients finis, que l'ensemble Σ_2 des places finies v de K hors de $\mathcal{V}$ (la représentation $\rho \otimes \chi_\ell$ est non ramifiée en dehors de $\mathcal{V}$ puisque ρ l'est) telles que $F_{v,\rho\otimes\chi_\ell} \neq \mathrm{Id}_{\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X\otimes\bar{K},\mathbf{Q}_\ell)(1)}$ ou encore $F_{v,\rho} \neq p_v^{-a_v}\,\mathrm{Id}_{\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X\otimes\bar{K},\mathbf{Q}_\ell)}$ a une densité égale à 1.

On pose $\Sigma := \Sigma_1 \cap \Sigma_2$; c'est un ensemble de places ultramétriques de K (en lesquelles ρ est non ramifiée) de densité > 0 et disjoint de $\mathcal{V}$.

Il reste, pour terminer la démonstration du lemme, à voir que si $v \in \Sigma$ alors l'une des valeurs propres de $F_{v,\rho}$ a une valuation p_v-adique nulle.

Soit $v \in \Sigma$. On suppose, par l'absurde, que toutes les valeurs propres du "Frobenius géométrique" $F_{v,\rho}^{-1}$ ont une valuation p_v-adique > 0. On a donc

$p_v \mid \mathrm{Tr}(F_{v,\rho}^{-1})$ (dans $\mathbf{Z}$). On en déduit que $\frac{1}{p_v} F_{v,\rho}^{-1}$ est unipotent d'après [DMOS, VI, Prop. 2.7]. On va donner l'argument parce qu'il explique l'hypothèse $\ell > 2b_2$ et le rôle de l'extension L. On considère w une place finie de L au-dessus de v. On note t_w la trace de $F_{w,\rho}^{-1}$. On note que, puisque $a_w = 1$, $F_{w,\rho} = F_{v,\rho}$. On a $t_w = p_w t'_w$ avec $t'_w \in \mathbf{Z}$ par hypothèse. On a bien sûr $t_w = \sum_{1 \leq i \leq b_2} \alpha_i$ où les $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq b_2}$ sont les valeurs propres de $F_{w,\rho}^{-1}$. On rappelle que α_i est un entier algébrique de module $p_w^{a_w} = p_v$ et que $t_w \in \mathbf{Z}$ [D]. On a alors d'une part $t_w \equiv b_2$ modulo ℓ puisque la représentation $\mathrm{Gal}(\bar{K}/L) \to \mathrm{GL}(\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X \otimes \bar{K}, \mathbf{Z}_\ell) \otimes (\mathbf{Z}_\ell/\ell\mathbf{Z}_\ell))$ est triviale et $p_w - 1 \equiv 0$ modulo ℓ puisque k_w est un corps premier et L contient un racine primitive ℓ-ième de l'unité. On a donc $t'_w \equiv b_2$ modulo ℓ et $|t'_w| \leq b_2$. On en déduit que $t'_w = b_2$ puisque $\ell > 2b_2$ (et $t'_w \in \mathbf{Z}$) puis que $t_w = p_w b_2$ et finalement que $\alpha_i = \alpha_j$ pour tout i, j dans $\{1, \ldots, b_2\}$. On a donc montrer que $\frac{1}{p_w} F_{w,\rho}^{-1} = \frac{1}{p_v} F_{v,\rho}^{-1}$ est unipotent. On en déduit que $F_{v,\rho} = \frac{1}{p_v} \mathrm{Id}_{\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X \otimes \bar{K}, \mathbf{Q}_\ell)}$ puisque, par hypothèse, $F_{v,\rho}$ est semi-simple. On a ainsi obtenu la contradiction souhaitée.

On obtient la deuxième assertion du lemme en remplaçant K par L ; en effet, d'après le théorème de densité de Čebotarev, l'ensemble des places finies de L dont le corps résiduel est premier a une densité 1. □

6. Démonstration du Théorème 2

On commence par un résultat général.

PROPOSITION 14. *Soit X une variété algébrique projective et lisse sur K, géométriquement intègre, de dimension $d = 2m$. On suppose qu'il existe une 2-forme φ telle qu'on ait $\mathrm{H}^0(X, \Omega^2_X) = K \cdot \varphi$ et $\varphi^{\wedge m} \neq 0$. On suppose également $h^{0,1} = 0$ et $h^{0,3} = 0$. On suppose enfin que la conjecture de semi-simplicité est vraie pour X. On considère un modèle entier $f : \mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ de X et un ensemble fini $\mathcal{V}$ de places non archimédiennes de K tel que f soit lisse au-dessus de l'ouvert $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K[\mathcal{V}^{-1}])$ de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$. Il existe alors un ensemble Σ de places ultramétriques de K de densité > 0 tel que pour tout $v \in \Sigma \setminus \mathcal{V}$ l'invariant de Hasse–Witt de $\mathcal{X}_v$ soit non nul. On peut supposer la densité de Σ égale à 1 quitte à remplacer K par une extension finie L de K convenable.*

Démonstration. On peut toujours supposer, quitte à élargir $\mathcal{V}$, que pour toute place finie $v \notin \mathcal{V}$ la cohomologie cristalline $\mathrm{H}^*_{\text{cris}}(\mathcal{X}_v/W(k_v))$ est sans torsion sur $W(k_v)$ [JRaj, Prop. 6.6.1] et que la suite spectrale de Hodge $E_1^{ij} = \mathrm{H}^j(\mathcal{X}_v, \Omega^i_{\mathcal{X}_v}) \Longrightarrow \mathrm{H}^{i+j}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{X}_v/k_v)$ dégénère en E_1 [DI].

On peut également supposer, quitte à nouveau à élargir $\mathcal{V}$, que

- $\varphi \in \mathrm{H}^0(\mathcal{X}^{\mathcal{V}}, \Omega^2_{\mathcal{X}^{\mathcal{V}}/\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K[\mathcal{V}^{-1}])})$ où $\mathcal{X}^{\mathcal{V}} := f^{-1}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K[\mathcal{V}^{-1}]))$,
- $\mathrm{H}^0(\mathcal{X}_v, \Omega^2_{\mathcal{X}_v}) = k_v \cdot \varphi_v$,
- $\varphi_v^m \neq 0$ $(v \notin \mathcal{V})$,
- $h^{0,2}(\mathcal{X}_v) = 1$ $(v \notin \mathcal{V})$,
- $h^{0,1}(\mathcal{X}_v) = 0$ $(v \notin \mathcal{V})$, et
- $h^{0,3}(\mathcal{X}_v) = 1$ $(v \notin \mathcal{V})$.

On fixe un nombre premier $\ell > 2\dim_{\mathbf{Q}}(\mathrm{H}^2_{\mathrm{B}}(X\otimes\mathbf{C},\mathbf{Q})$. On note ρ la représentation ℓ-adique $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to \mathrm{GL}(\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X\otimes\bar{K},\mathbf{Q}_\ell))$. On sait d'après les Lemmes 12 et 13 qu'il existe un ensemble Σ de places ultramétriques de K de densité > 0 tel que, si $v \in \Sigma$ alors

- k_v est un corps premier de caractéristique $p_v \neq \ell$,
- ρ est non ramifée en v,
- l'une des valeurs propres du "Frobenius géométrique" $F^{-1}_{v,\rho}$ a une valuation p_v-adique nulle.

Soit $v \in \Sigma \setminus \mathcal{V}$. On sait que l'ensemble des valeurs propres de $F_{v,\rho}$ coïncide avec l'ensemble des valeurs propres de l'inverse de l'endomorphisme inversible $K_0(k_v)$-linéaire F_{cris} de $\mathrm{H}^2_{\text{cris}}(\mathcal{X}_v/W(k_v)) \otimes_{W(k_v)} K_0(k_v)$ d'après [KMe]. On déduit alors du Lemme 8 que $C_v(\varphi_v) \neq 0$ et enfin du Lemme 5 que l'invariant de Hasse–Witt de $\mathcal{X}_v$ est non nul. □

On est maintenant en mesure de démontrer le Théorème 2.

Démonstration du Théorème 2. On note $\bar{K}$ une clôture algébrique de K et on fixe un nombre premier ℓ. On sait, d'après [An, Thm. 1.5.1], qu'il existe une variété abélienne A définie sur K telle que le $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$-module $\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X\otimes\bar{K},\mathbf{Q}_\ell)$ soit un facteur direct du $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$-module $\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(A\otimes\bar{K},\mathbf{Q}_\ell)$. On en déduit que la conjecture de semi-simplicité (en degré 2) est vraie pour X puisqu'elle est vraie pour A. On déduit maintenant le résultat cherché de la Proposition 14. □

Démonstration du Corollaire 3. On a, par hypothèse, un K-isomorphisme $X' \simeq \prod_{1\leq i\leq s} Y_i$ où, pour $i \in \{1,\dots,s\}$, la K-variété Y_i est ou bien une variété abélienne de dimension ≤ 2 ou bien une variété symplectique irréductible avec $b_2(Y_i\otimes\mathbf{C}) > 3$.

On considère, pour $i \in \{1,\dots,s\}$, un modèle entier $\mathcal{Y}_i \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ de Y_i. Quitte à élargir $\mathcal{V}$, on peut toujours supposer que le morphisme $\mathcal{Y}_i \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ est lisse au-dessus de l'ouvert $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K[\mathcal{V}^{-1}])$ de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ et qu'il existe un morphisme étale

$$\mathcal{Y}_1^{\mathcal{V}} \times_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K[\mathcal{V}^{-1}])} \mathcal{Y}_2^{\mathcal{V}} \times_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K[\mathcal{V}^{-1}])} \cdots \times_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K[\mathcal{V}^{-1}])} \mathcal{Y}_s^{\mathcal{V}} \to \mathcal{X}^{\mathcal{V}}$$

où $\mathcal{Y}_i^{\mathcal{V}} := \mathcal{Y}_i \times_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K[\mathcal{V}^{-1}])$ et $\mathcal{X}^{\mathcal{V}} := \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K[\mathcal{V}^{-1}])$.

On fixe un nombre premier $\ell \gg 0$ et on considère une extension Galoisienne finie L de K contenant toutes les racines ℓ-ième de l'unité telle que pour tout $i \in \{1,\dots,s\}$, la représentation

$$\mathrm{Gal}(\bar{K}/L) \to \mathrm{GL}(\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(Y_i\otimes\bar{K},\mathbf{Z}_\ell)\otimes(\mathbf{Z}_\ell/\ell\mathbf{Z}_\ell))$$

soit triviale. On sait d'après le Théorème 2 (c'est en fait une conséquence de sa démonstration) que pour tout $i \in \{1,\dots,s\}$, il existe un ensemble Σ_i de places finies de L de densité 1 tels que pour tout $v \in \Sigma_i \setminus \mathcal{V}$ l'invariant de Hasse–Witt de $\mathcal{Y}_{i,v}$ soit non nul. On pose $\Sigma := \bigcap_{1\leq i\leq s} \Sigma_i$; Σ est un ensemble de places finies de L de densité 1. Soit $v \in \Sigma \setminus \mathcal{V}$. On a donc $\beta_{i,v} \in \mathrm{H}^{\dim(\mathcal{Y}_{i,v})}(\mathcal{Y}_{i,v},\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{i,v}}) \setminus \{0\}$ et $\lambda_i \in k_v \setminus \{0\}$ (pour tout $i \in \{1,\dots,s\}$) tel que $F^*_{i,v}(\beta_i) = \lambda_i\beta_i$ où $F_{i,v}\colon \mathcal{Y}_{i,v} \to \mathcal{Y}_{i,v}$ désigne le Frobenius absolu. On a donc

$$\prod_{1\le i\le s}(\beta_1\cup\cdots\cup\beta_s)=\Big(\prod_{1\le i\le s}\lambda_i\Big)(\beta_1\cup\cdots\cup\beta_s)\neq 0,$$

autrement dit, l'invariant de Hasse–Witt de $\mathcal{Y}_{i,v}\times\cdots\times\mathcal{Y}_{s,v}$ est non nul. On note $F_v\colon \mathcal{X}_v\to\mathcal{X}_v$ le Frobenius absolu. On pose $\mathcal{X}'_v:=\dim\big(\prod_{1\le i\le s}\mathcal{Y}_{i,v}\big)$ et on note aussi F_v le produit $\prod_{1\le i\le s}F_{i,v}$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^{\dim(\mathcal{X}_v)}(\mathcal{X}_v,\mathcal{O}_{\mathcal{X}_v}) \arrow[r, "F_v^*"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{H}^{\dim(\mathcal{X}_v)}(\mathcal{X}_v,\mathcal{O}_{\mathcal{X}_v}) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{H}^{\dim(\mathcal{X}'_v)}(\mathcal{X}'_v,\mathcal{O}_{\mathcal{X}'_v}) \arrow[r, "F_v^*"] & \mathrm{H}^{\dim(\mathcal{X}'_v)}(\mathcal{X}'_v,\mathcal{O}_{\mathcal{X}'_v})
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont induites par le morphisme étale $\mathcal{X}'_v\to\mathcal{X}_v$. On en déduit que l'invariant de Hasse–Witt de $\mathcal{X}_v$ est également non nul.

Références

[An] Y. André, *On the Shafarevich and Tate conjectures for hyper-Kähler varieties,* Math. Ann. 305 (1996), 205–248.

[AMa] M. Artin and B. Mazur, *Formal groups arising from algebraic varieties,* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 10 (1977), 87–131.

[B] A. Beauville, *Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle,* J. Differential Geom. 18 (1983), 755–782.

[Be1] P. Berthelot, *Sur le "théorème de Lefschetz faible" en cohomologie cristalline,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 277 (1973), A955–A958.

[Be2] ———, *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p>0$,* Lecture Notes in Math., 407, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[BoZ] F. A. Bogomolov and Y. G. Zarhin, *Ordinary reduction of K3 surfaces,* Cent. Eur. J. Math. 7 (2009), 206–213.

[BrKu] M. Brion and S. Kumar, *Frobenius splitting methods in geometry and representation theory,* Progr. Math., 231, Birkhäuser, Boston, 2005.

[D] P. Deligne, *La conjecture de Weil. I,* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 43 (1974), 273–307.

[DI] P. Deligne and L. llusie, *Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham,* Invent. Math. 89 (1987), 247–270.

[DMOS] P. Deligne, J. S. Milne, A. Ogus, and K.-y. Shih, *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties,* Lecture Notes in Math., 900, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[E] N. D. Elkies, *The existence of infinitely many supersingular primes for every elliptic curve over* $\mathbf{Q}$, Invent. Math. 89 (1987), 561–567.

[F] G. Faltings, *Crystalline cohomology and p-adic Galois-representations,* Algebraic analysis, geometry, and number theory (Baltimore, 1988), pp. 25–80, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 1989.

[I] L. Illusie, *Complexe de de Rham–Witt et cohomologie cristalline,* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 12 (1979), 501–661.

[IRay] L. Illusie and M. Raynaud, *Les suites spectrales associées au complexe de de Rham–Witt,* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 57 (1983), 73–212.

[JRaj] K. Joshi and C. S. Rajan, *Frobenius splitting and ordinarity,* Int. Math. Res. Not. 2003 (2003), 109–121.

[K1] N. M. Katz, *Algebraic solutions of differential equations (p-curvature and the Hodge filtration),* Invent. Math. 18 (1972), 1–118.

[K2] ———, *Review of l-adic cohomology,* Motives (Seattle, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., 55, pp. 21–30, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[KMe] N. M. Katz and W. Messing, *Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields,* Invent. Math. 23 (1974), 73–77.

[Man] Ju. I. Manin, *Theory of commutative formal groups over fields of finite characteristic,* Uspekhi Mat. Nauk 18 (1963), 3–90.

[MehR] V. B. Mehta and A. Ramanathan, *Frobenius splitting and cohomology vanishing for Schubert varieties,* Ann. of Math. (2) 122 (1985), 27–40.

[MuSr] M. Mustaţă and V. Srinivas, *Ordinary varieties and the comparison between multiplier ideals and test ideals,* Nagoya Math. J. 204 (2011), 125–157.

[O'G1] K. G. O'Grady, *Desingularized moduli spaces of sheaves on a K3,* J. Reine Angew. Math. 512 (1999), 49–117.

[O'G2] ———, *A new six-dimensional irreducible symplectic variety,* J. Algebraic Geom. 12 (2003), 435–505.

[Rap] A. Rapagnetta, *On the Beauville form of the known irreducible symplectic varieties,* Math. Ann. 340 (2008), 77–95.

[SGA4] J.-P. Serre, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3,* Lecture Notes in Math., 305, Springer-Verlag, Berlin, 1973; Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, et J. L. Verdier (avec la collaboration de P. Deligne et B. Saint-Donat).

[SGA5] ———, *Cohomologie l-adique et fonctions L,* Lecture Notes in Math., 589, Springer-Verlag, Berlin, 1977; Séminaire de Géometrie Algébrique du Bois-Marie 1965–1966 (SGA 5), Edité par Luc Illusie.

[Se] ———, *Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev,* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 54 (1981), 323–401.

[T1] J. T. Tate, *Algebraic cycles and poles of zeta functions,* Arithmetical algebraic geometry (Purdue Univ., 1963), pp. 93–110, Harper & Row, New York, 1965.

[T2] ———, *Conjectures on algebraic cycles in l-adic cohomology,* Motives (Seattle, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., 55, pp. 71–83, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

Institut Fourier
UMR 5582 du CNRS
Université Grenoble 1, BP 74
38402 Saint Martin d'Hères
France

druel@ujf-grenoble.fr