VARIÉTÉS RATIONNELLEMENT CONNEXES SUR UN CORPS ALGÉBRIQUEMENT CLOS

LAURENT BONAVERO

Résumé. Ce sont les notes d'un mini-cours sur les variétés rationnellement connexes, écrit pour les Etats de la Recherche de la Société Mathématique de France (Strasbourg, 2008)[ab]. On met l'accent sur les aspects géométriques. Ces notes sont aussi une invitation à lire le livre d'Olivier Debarre [Deb01], dont une grande partie de ce cours est extraite. Ces notes doivent surtout permettre au lecteur de comprendre l'énoncé suivant et l'un de ses fameux corollaires [GHS03].

Théorème 1. **(Graber, Harris et Starr)** *Sur un corps algébriquement clos, soient X une variété projective lisse et $\varphi : X \to C$ un morphisme surjectif sur une courbe projective lisse C. Si la fibre générale de φ est séparablement rationnellement connexe, alors φ possède une section.*

Corollaire 2. **(Graber, Harris et Starr)** *Sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, soit $f : X \to Y$ un morphisme dominant entre deux variétés projectives. Si Y et la fibre générale de f sont rationnellement connexes, alors X est rationnellement connexe.*

Les preuves de ces deux résultats sont données dans le cours de Jason Starr, le matériel préliminaire nécessaire est présenté en détail dans ces notes. Ce cours est rédigé dans l'espoir de s'adresser à un public large, à l'exception peut-être du §7, où nous donnons les détails de la preuve de la conjecture de connexité rationnelle de Shokurov par Hacon et M^c^Kernan, plus technique et où les prérequis sont un peu plus importants.

[a]Je remercie tous les participants pour leurs commentaires qui ont permis d'améliorer grandement ce texte par rapport à la version distribuée le jour de la conférence. Stéphane Druel à Grenoble m'a apporté une aide inestimable lors de la préparation de ce cours.
[b]Institut Fourier, UFR de Mathématiques, Université de Grenoble 1, UMR 5582, BP 74, 38402 Saint Martin d'Hères, FRANCE. e-mail : laurent.bonavero@ujf-grenoble.fr

Table des matières

COURS 1

Ce premier cours est un survol sur l'importance et la présence des courbes rationnelles en géométrie algébrique. On traite le cas particulier des hypersurfaces de l'espace projectif et on discute le lien entre courbes rationnelles et géométrie birationnelle classique (éclatements, lieux exceptionnel et d'indétermination) ou moderne (théorie de Mori). On introduit enfin la notion de connexité rationnelle et des notions qui lui sont reliées.

Introduction

Sauf mention explicite du contraire, toutes les variétés algébriques et les morphismes considérés sont définis **sur un corps k algébriquement clos de caractéristique arbitraire**, les variétés sont irréductibles et réduites. Certains énoncés ne sont valables qu'en caractéristique 0 (ceux dont la preuve nécessite le théorème de lissité générique ou ceux pour lesquels il faut utiliser une résolution des singularités) ou sur un corps non dénombrable (ceux pour lesquels il est important de savoir qu'une variété n'est pas réunion dénombrable de sous-variétés propres), on le mentionnera explicitement.
Une courbe est une variété projective intègre (irréductible et réduite) de dimension 1.
Si X est une variété (quasi-) projective, on dira qu'un point est en position générale, ou plus simplement général, s'il appartient à un ouvert non vide (non spécifié) de X, qu'il est en position très générale, ou plus simplement très général, s'il appartient au complémentaire d'une réunion dénombrable de fermés stricts de X. Cette dernière notion n'est que très peu pertinente sur un corps dénombrable où le complémentaire d'une réunion dénombrable de fermés stricts de X peut être vide.

1. Quelques exemples de variétés possédant des courbes rationnelles.

1.1. **Généralités.** Il y a trois grandes classes de courbes projectives lisses : la droite projective $\mathbb{P}^1$ (dont la topologie complexe est celle d'une sphère), les courbes elliptiques (dont la topologie complexe est celle d'un tore), les courbes de genre ≥ 2 (dont la topologie complexe est celle d'une bouée multi-places). Il y a énormément d'invariants ou outils permettant de distinguer ces trois classes, celui qui nous sera le plus utile sera le signe du fibré canonique : si X est une variété projective lisse de dimension n, on note classiquement $K_X := -\det T_X$[1]. C'est le fibré en droites dont les sections locales sont les n-formes régulières $f(z_1, \dots, z_n)dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$. Pour une courbe lisse C, on a $K_C = T_C^*$ et les propriétés suivantes sont satisfaites : $-K_{\mathbb{P}^1}$ est ample, K_E est trivial si E est une courbe elliptique et K_C est ample si C est de genre ≥ 2.

Le problème suivant est un problème classique en géométrie algébrique : si $X \subset \mathbb{P}^N$ est une variété projective, existe-t-il une courbe dans X de degré donné et de genre donné ? Si

[1]On ne distinguera pas entre notation additive et multiplicative pour le groupe de Picard. Ici, K_X est le dual du fibré $\det T_X$.

oui, en existe-t-il beaucoup et que peut-on dire du lieu dans X couvert par ces courbes ? Une situation élémentaire où l'on peut énoncer une réponse complète est le cas des courbes planes : si $C \subset \mathbb{P}^2$ est une courbe lisse plane de genre g et de degré d, alors $g = (d-1)(d-2)/2$. Si $C \subset \mathbb{P}^2$ est une courbe de degré d (ceci signifie que C intersecte une droite générale de $\mathbb{P}^2$ en d points), alors le genre g de sa désingularisée vérifie $g \leq (d-1)(d-2)/2$. En particulier, si $C \subset \mathbb{P}^2$ est isomorphe à $\mathbb{P}^1$, alors C est une droite ou une conique dans $\mathbb{P}^2$ et si $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ est un morphisme dont l'image $f(\mathbb{P}^1)$ est de degré ≥ 3, alors $f(\mathbb{P}^1)$ est nécessairement singulière.

Définition 3. *Soit X une variété projective. Une courbe rationnelle sur X est un morphisme $f : \mathbb{P}^1 \to X$ non constant*[2]*. Le degré d'une courbe rationnelle $f : \mathbb{P}^1 \to X$ est le degré du morphisme f.*

Le lecteur débutant doit commencer par se convaincre qu'il n'y a pas de morphisme $f : \mathbb{P}^1 \to C$ non constant si C est une courbe de genre ≥ 1.[3]

1.2. **Courbes rationnelles contenues dans les hypersurfaces de $\mathbb{P}^n$.** Les courbes rationnelles les plus simples dans l'espace projectif sont les droites. On se demande ici si une hypersurface (générale) de degré d dans $\mathbb{P}^n$ contient (au moins) une droite.
La variété des droites dans $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ (où V est un espace vectoriel de dimension $n+1$[4]) est la grassmannienne $G(2, n+1)$ de dimension $2n-2$. Il y a sur $G(2, n+1)$ un sous-fibré tautologique E de rang 2 du fibré trivial $G(2, n+1) \times V$ (la fibre $E_{[l]}$ de E au dessus de $[l] \in G(2, n+1)$ est le sous-espace vectoriel de V de dimension 2 défini par la droite $l \subset \mathbb{P}(V)$). Une hypersurface X_d de degré d dans $\mathbb{P}(V)$ est donnée par son équation, à savoir un polynôme homogène de degré d, autrement dit un élément s de $S^d(V^*)$. L'hypersurface X_d contient la droite l si et seulement si $s_{|E_{[l]}}$ est nul. La sous-variété $F_{X_d}(1, n, d)$ de $G(2, n+1)$ des droites contenues dans X_d est donc le lieu des zéros de s vue comme section du fibré $S^d(E^*)$ sur $G(2, n+1)$. Il est alors bien connu (en caractéristique zéro seulement) que pour s générale, $\dim F_{X_d}(1, n, d) = \dim G(2, n+1) - \operatorname{rg} S^d(E^*)$ si cette quantité est positive ou nulle, et que $F_{X_d}(1, n, d)$ est vide sinon. Comme $\operatorname{rg} S^d(E^*) = d+1$, on en déduit l'énoncé suivant.

[2]Il pourra arriver que par abus de langage (ou par inattention), on parle aussi de courbes rationnelles pour désigner l'image d'un morphisme non constant $f : \mathbb{P}^1 \to X$.

[3]Dans sa thèse [Laz84], R. Lazarsfeld montre le très joli résultat suivant : si X est une variété projective complexe lisse de dimension n et si $f : \mathbb{P}^n \to X$ est un morphisme surjectif, alors $X \simeq \mathbb{P}^n$. La preuve utilise de façon essentielle la géométrie des courbes rationnelles de X. Hwang et Mok ont depuis étendu ce résultat à de nombreuses variétés de Fano avec nombre de Picard égal à 1.

[4]Dans tout ce cours, nous suivons la convention naïve : $\mathbb{P}(V)$ désigne la variété des droites vectorielles de V.

Proposition 4. *En caractéristique nulle*[5], *une hypersurface générale de degré d dans $\mathbb{P}^n$ contient une infinité de droites si $d < 2n-3$, un nombre fini de droites si $d = 2n-3$ et ne contient pas de droites si $d > 2n-3$.*

Le lecteur intéressé consultera [DM98] pour en savoir beaucoup plus sur la variété des r-plans contenus dans une intersection complète. Il y trouvera aussi des valeurs numériques du nombre de droites contenues dans une hypersurface générale de degré $2n-3$ dans $\mathbb{P}^n$, dont le célèbre et classique : il y a 27 droites sur une cubique lisse de $\mathbb{P}^3$.

Dans le cas où $d < 2n-3$, il est possible de préciser un peu le lieu de X_d couvert par les droites contenues dans X_d. Soit en effet $Z \subset X_d \times F_{X_d}(1,n,d)$ la variété d'incidence suivante :

$$Z := \{(x,[l]) \in X_d \times F_{X_d}(1,n,d) \mid x \in l\}.$$

Les fibres de la deuxième projection $Z \to F_{X_d}$ étant de dimension 1, on a $\dim Z = 2n-2-d$. Soit $V = p_1(Z) \subset X_d$ l'image de Z dans X_d par la première projection : c'est le lieu de X_d couvert par les droites contenues dans X_d. Si $d \geq n$, on déduit de ce qui précède que V est une sous-variété stricte de X_d, on montre aussi aisément[6] que si $d \leq n-1$, alors $V = X_d$, autrement dit X_d est couverte par des droites. Finalement, dans le cas $d = n$, des arguments analogues permettent de montrer que X_n est couverte par des coniques[7].

[5]Cet énoncé est en fait encore vrai en caractéristique positive.

[6]Si s est un polynôme homogène de degré d définissant X_d et si $x = [1:0:\cdots:0] \in X_d$, alors la droite passant par x et un point $[0:x_1:\cdots:x_n]$ est contenue dans X_d si et seulement si $s(t,x_1,\ldots,x_n) = 0$ pour tout t. Comme $t \mapsto s(t,x_1,\ldots,x_n)$ est un polynôme en t de degré $\leq d-1$, ce polynôme est nul si et seulement si ses d coefficients sont nuls, ce qui consiste à résoudre d équations homogènes de degrés respectifs $1,2,\ldots,d$ en les variables $[x_1:\cdots:x_n]$. Il y a au moins une solution si $d \leq n-1$. Dans le cas $d = n-1$, on remarque qu'il y en a $(n-1)!$, autrement dit par un point général de $X_{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ passent $(n-1)!$ droites. Cette observation élémentaire a inspiré un très joli résultat dû à J.M. Landsberg [Lan03].

[7]*Merci à Laurent Manivel à qui je dois les références m'ayant permis d'écrire cette "footnote", en réponse à une question de Jean-Louis Colliot-Thélène.* Par un point général de $X_n \subset \mathbb{P}^n$ passent un nombre fini de coniques. Il n'y a pas, à ma connaissance, de méthodes élémentaires pour déterminer ce nombre en dimension quelconque. La formule générale découle d'un calcul d'invariants de Gromov-Witten à l'aide de la symétrie miroir utilisant une équation différentielle ordinaire introduite par Givental. Les lignes qui suivent sont issues de la lecture de [JNS04] et [Jin05].

Théorème 5. (Coates, Givental - Jinzenji, Nakamura, Suzuki) *Sur le corps des nombres complexes, soit $X_n \subset \mathbb{P}^n$ une hypersurface générale de degré n dans $\mathbb{P}^n$. Soit N_n le nombre de coniques contenues dans X_n et passant par un point général de X_n. Alors*

$$N_n = \frac{(2n)!}{2^{n+1}} - \frac{(n!)^2}{2}.$$

On renvoie à [Bea95] et [BH10] pour d'autres résultats sur les coniques contenues dans des hypersurfaces.

Expliquons brièvement comment on obtient ce résultat. Si a, b, c et d sont quatre entiers, notons $\langle \mathcal{O}_a \mathcal{O}_b \mathcal{O}_c \rangle_d$ l'invariant de Gromov-Witten comptant le nombre (éventuellement infini) de courbes rationnelles de degré d contenues dans X_n et rencontrant 3 sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}^n$, généraux, de

Si X_d est une hypersurface lisse de degré d dans $\mathbb{P}^n$, son fibré canonique est calculé par la formule d'adjonction et vaut $K_{X_d} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-n-1)_{|X_d}$. La proposition précédente est une première illustration d'un principe général : *"plus le fibré canonique K_X est positif, moins il y a de courbes rationnelles sur X, plus ce fibré est négatif, plus il y a de courbes rationnelles sur X"*.

De nombreux auteurs (dont Clemens, Voisin et Pacienza) ont étudié l'existence de courbes rationnelles de degré ≥ 2 dans les hypersurfaces de $\mathbb{P}^n$. Rassemblons leurs résultats (voir [Pac03] et sa bibliographie).

Théorème 6. *Supposons le corps de base de caractéristique nulle. Soit X_d une hypersurface très générale de degré d dans $\mathbb{P}^n$. Alors :*

(1) **(Clemens)** *si $n \geq 3$ et $d \geq 2n-1$, X_d ne contient pas de courbes rationnelles,*
(2) **(Voisin)** *si $n \geq 4$ et $d \geq 2n-2$, X_d ne contient pas de courbes rationnelles,*
(3) **(Voisin)** *si $n \geq 5$ et si $\delta \geq 1$, X_{2n-3} ne contient qu'un nombre fini de courbes rationnelles de degré δ,*
(4) **(Pacienza)** *si $n \geq 6$ et si $\delta \geq 2$, X_{2n-3} ne contient pas de courbes rationnelles de degré δ.*

1.3. **Courbes rationnelles provenant de la géométrie birationnelle classique.** La géométrie birationnelle consiste à classifier les variétés algébriques en identifiant deux variétés algébriques si elles sont "isomorphes sur un ouvert (de Zariski) non vide".

Définition 7. *Deux variétés algébriques X et X' sont birationnellement équivalentes s'il existe une application rationnelle $\varphi : X \dashrightarrow X'$ et des ouverts non vides $U \subset X$ et $U' \subset X'$ tels que $\varphi_{|U} : U \to U'$ soit un isomorphisme. Une telle φ est une* application birationnelle*.*

---

codimension respective a, b et c. Lorsque a, b ou c valent 1, chaque courbe rationnelle de degré d contenue dans X_n est comptée d fois puisque l'intersection d'une courbe de degré d et d'un hyperplan général est constituée de d points. Comme l'intersection d'une droite générale et de X_n est constituée de n points, le nombre N_n cherché vaut donc $N_n = \langle \mathcal{O}_1\mathcal{O}_1\mathcal{O}_{n-1}\rangle_2/4n$. Dans [Jin05] sont introduites des constantes $\tilde{L}_m^{n+1,n,d}$, dites "constantes de structure de l'anneau de cohomologie quantique de X_n". Ces constantes satisfont aux formules récurrentes suivantes (que l'on explicite uniquement dans les cas $d=1$ et $d=2$) :

$$\sum_{m=0}^{n-1} \tilde{L}_m^{n+1,n,1} w^m = n \prod_{j=1}^{n-1} (jw + (n-j))$$

et

$$\sum_{m=0}^{n-2} \tilde{L}_m^{n+1,n,2} w^m = \sum_{j_2=0}^{n-2} \sum_{j_1=0}^{j_2} \sum_{j_0=0}^{j_1} \tilde{L}_{j_1}^{n+1,n,1} \tilde{L}_{j_2+1}^{n+1,n,1} w^{j_1-j_0} \left(\frac{1+w}{2}\right)^{j_2-j_1}.$$

Il y est aussi montré que pour tout entier m, $0 \leq m \leq n-2$, on a $\tilde{L}_m^{n+1,n,2} = \langle \mathcal{O}_1\mathcal{O}_{n-1-m}\mathcal{O}_{m+1}\rangle_2/n$.

Le théorème découle du calcul du coefficient de w^{n-2} dans la deuxième formule ci-dessus, de celui de w^{n-1} dans la première et enfin de l'évaluation de cette dernière en $w=2$. ■

Si V' est une-sous variété de X' non contenue dans $X' \setminus U'$, $V =: \overline{\varphi^{-1}(U' \cap V')}$ est la transformée stricte *de V' dans X.*

Un exemple fondamental d'application birationnelle est celui des éclatements le long de sous-variétés lisses : si Y est une sous-variété fermée lisse contenue dans le lieu non-singulier d'une variété algébrique X, il y a une variété algébrique $B_Y(X)$ et un morphisme birationnel $\pi : B_Y(X) \to X$ qui se restreint en un isomorphisme $\pi : B_Y(X) \setminus \pi^{-1}(Y) \to X \setminus Y$ et telle que $\pi^{-1}(Y) \simeq \mathbb{P}(N_{Y/X})$ où $N_{Y/X}$ désigne le fibré normal de Y dans X. L'application birationnelle $\pi : B_Y(X) \to X$ s'appelle *l'éclatement de X le long de Y, ou de centre Y* et $E := \pi^{-1}(Y)$ est le *diviseur exceptionnel* de π. Moralement, on remplace chaque point y de Y par l'espace projectif des directions normales à Y dans X passant par y. Comme les espaces projectifs contiennent beaucoup de courbes rationnelles, il y a en particulier des courbes rationnelles dans $B_Y(X)$. Une première utilisation des éclatements[8] permet de démontrer les résultats suivants, le premier est connu sous le nom de lemme d'Abhyankar.

[8]Les éclatements jouent un rôle central en géométrie birationnelle comme le montrent les trois énoncés difficiles et fondamentaux suivants (voir [Hir64], [Hir75], [AKMW02] et le survol [Bon02]). Ils ne sont connus qu'en caractéristique zéro, leur preuve dépasse largement le cadre de ce cours.

Théorème 8. (Hironaka - Théorème de désingularisation) *Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une variété projective. Alors il existe une suite finie d'éclatements $Z_p \to Z_{p-1} \to \cdots \to Z_0 = \mathbb{P}^N$ le long de sous-variétés lisses $Y_i \subset Z_i$ telle que, si π_i désigne la composée $\pi_i : Z_i \to \mathbb{P}^N$ et $X_i \subset Z_i$ la transformée stricte de $X = X_0$ sous π_i, alors*

(1) *chaque Y_i est incluse dans le lieu singulier de X_i,*
(2) *la variété X_p est une variété projective lisse. On dit que $\pi_p : X_p \to X$ est une désingularisation (plongée) de X.*

Théorème 9. (Hironaka - Levée des indéterminations) *Soient $X \subset \mathbb{P}^N$ une variété projective, X' une variété projective et $\varphi : X \dashrightarrow X'$ une application rationnelle. Alors il existe une suite finie d'éclatements $Z_p \to Z_{p-1} \to \cdots \to Z_0 = \mathbb{P}^N$ le long de sous-variétés lisses $Y_i \subset Z_i$ telle que, si π_i désigne la composée $\pi_i : Z_i \to \mathbb{P}^N$ et $X_i \subset Z_i$ la transformée stricte de $X = X_0$ sous π_i, alors*

(1) *chaque Y_i est incluse dans le lieu d'indétermination de $\varphi \circ \pi_i$,*
(2) *l'application rationnelle $\varphi \circ \pi_p : X_p \dashrightarrow X'$ se prolonge en une application régulière $\varphi \circ \pi_p : X_p \to X'$.*

Théorème 10. (Abramovich, Karu, Matsuki et Włodarczyk - Théorème de factorisation) *Soit $\varphi : X \dashrightarrow X'$ une application birationnelle entre deux variétés projectives lisses X et X'. Alors, φ se factorise en une suite d'éclatements et de contractions de centres lisses. Autrement dit, il y a une suite d'applications birationnelles entre variétés projectives lisses*

$$X_1 = V_0 \overset{\varphi_0}{\dashrightarrow} V_1 \overset{\varphi_1}{\dashrightarrow} \cdots \overset{\varphi_{i-1}}{\dashrightarrow} V_i \overset{\varphi_i}{\dashrightarrow} V_{i+1} \overset{\varphi_{i+1}}{\dashrightarrow} \cdots \overset{\varphi_{l-2}}{\dashrightarrow} V_{l-1} \overset{\varphi_{l-1}}{\dashrightarrow} V_l = X_2$$

de sorte que $\varphi = \varphi_{l-1} \circ \varphi_{l-2} \circ \cdots \varphi_1 \circ \varphi_0$ et pour tout i, $\varphi_i : V_i \dashrightarrow V_{i+1}$ ou $\varphi_i^{-1} : V_{i+1} \dashrightarrow V_i$ est un éclatement le long d'une sous-variété lisse.

Proposition 11. *Soient X et Y des variétés projectives et $\pi : X \to Y$ un morphisme birationnel. On suppose que Y est lisse. Alors, par un point général de toute composante irréductible de* $\mathrm{Exc}(\pi)$[9] *passe une courbe rationnelle contractée par π.*

La preuve consiste à se ramener au cas où $\mathrm{Exc}(\pi)$ est irréductible lisse et d'image lisse dans Y, puis à faire des éclatements successifs de Y le long de sous-variétés lisses, le premier éclatement se faisant le long de $\pi(\mathrm{Exc}(\pi))$, et enfin à montrer que $\mathrm{Exc}(\pi)$ est birationnellement équivalent à l'un des diviseurs exceptionnels de cette suite d'éclatements[10].

Corollaire 12. *Soient X et Y des variétés projectives. On suppose que X est lisse et que Y ne contient pas de courbe rationnelle. Alors toute application rationnelle $\varphi : X \dashrightarrow Y$ se prolonge en une application régulière $X \to Y$.*

Démonstration. Soit $G_\varphi \subset X \times Y$ l'adhérence du graphe de φ. La première projection $p : G_\varphi \to X$ est une application birationnelle. Comme X est lisse, d'après la proposition précédente, toute composante irréductible de $\mathrm{Exc}(p)$ contient une courbe rationnelle $C \subset G_\varphi \subset X \times Y$ contractée par p. Comme Y ne contient pas de courbes rationnelles, c'est que la deuxième projection $q : G_\varphi \to Y$ contracte aussi C, ce qui est absurde, une courbe dans $X \times Y$ ne pouvant être à la fois "horizontale" et "verticale". Ainsi $\mathrm{Exc}(p) = \varnothing$ ce qui implique le résultat. ■

Le résultat précédent implique de suite.

Corollaire 13. *Soit X une variété projective lisse ne contenant pas de courbes rationnelles. Alors toute application $\varphi : X \dashrightarrow X$ birationnelle se prolonge en un isomorphisme (birégulier) de X.*

Démonstration. Par le corollaire précédent, φ et φ^{-1} se prolongent en des morphismes réguliers. ■

A l'inverse, les variétés X possédant beaucoup de courbes rationnelles ont en général des applications birationnelles $X \dashrightarrow X$ qui ne sont pas des isomorphismes. C'est en particulier le cas des espaces projectifs $\mathbb{P}^n$, $n \geq 2$, dont le groupe des transformations birationnelles est beaucoup plus gros (et compliqué) que son groupe d'isomorphismes réguliers qui n'est autre que le groupe PGL_{n+1}. Nous verrons plus loin que ce principe est à prendre avec prudence : on montre en effet parfois que certaines variétés de Fano[11] (possédant beaucoup de courbes rationnelles, voir §6) ne sont pas rationnelles (*i.e.* birationnellement équivalentes à $\mathbb{P}^n$)

[9] $\mathrm{Exc}(\pi)$ désigne le fermé de X formé des points au voisinage desquels π n'est pas un isomorphisme.

[10] En caractéristique zéro, on peut, en levant les indéterminations de π^{-1} par une suite d'éclatements de centres lisses, montrer que toute fibre de π est rationnellement connexe par chaînes. Cette notion sera introduite plus loin et ce résultat sera étendu au cas où X est peu singulière, c'est l'objet de la toute dernière partie de ce cours.

[11] Une variété projective est de Fano si $-K_X$ est un diviseur de Cartier ample.

en prouvant que leur groupe de transformations birationnelles coïncide avec leur groupe d'isomorphismes réguliers (c'est le cas de la quartique complexe lisse dans $\mathbb{P}^4$ par exemple).

1.4. **Courbes rationnelles et théorie de Mori.** Ce paragraphe est une première introduction aux liens entre courbes rationnelles et signe du fibré canonique tels qu'ils apparaissent dans la géométrie birationnelle “moderne”, à savoir la théorie de Mori (ou MMP pour “Minimal Model Program”).
Quelques notations : si $f : X \to Y$ est un morphisme entre deux variétés projectives normales, on note $\mathrm{N}_1(X/Y)$ l'espace vectoriel réel engendré par les courbes contractées par f, modulo l'équivalence numérique. Le sous-cône convexe fermé de $\mathrm{N}_1(X/Y)$ engendré par les classes des 1-cycles effectifs est noté $\overline{\mathrm{NE}}(X/Y)$.
Le résultat à la base de la théorie de Mori est le suivant. Il est le fruit des travaux de nombreux auteurs dont les principaux sont Benveniste, Kawamata, Kollár, Mori, Reid et Shokurov. On renvoie au très récent et lumineux texte de Druel [Dru08] pour une présentation des toutes dernières avancées du MMP par Birkar, Cascini, Hacon et M^cKernan [BCHM10].

Théorème 14. (Théorème du cône) *On suppose que le corps de base est de caractéristique zéro. Soient X une variété projective à singularités terminales*[12] *et $f : X \to Z$ un morphisme sur une variété projective Z.*

(1) *Il existe une famille au plus dénombrable $(\Gamma_i)_{i\in I}$ de courbes rationnelles telle que pour tout $i \in I$,*
   (i) $\dim(f(\Gamma_i)) = 0$,
   (ii) $0 < -K_X \cdot \Gamma_i \leq 2\dim(X)$,
   (iii) $R_i := \mathbb{R}^+[\Gamma_i]$ *est une arête du cône* $\overline{\mathrm{NE}}(X/Z)$,
   (iv) $\overline{\mathrm{NE}}(X/Z) = \overline{\mathrm{NE}}(X/Z)_{K_X\geq 0} + \sum_{i\in I} R_i$.
(2) *Soit $i \in I$. Il existe un unique morphisme à fibres connexes $c_i : X/Z \to X_i/Z$ sur une variété projective normale X_i tel que, pour toute courbe $C \subset X$, $\dim(c_i(C)) = 0$ si et seulement si $[C] \in R_i$; le morphisme c_i est appelé la contraction de R_i.*

Ce théorème dit en particulier que si le fibré canonique K_X n'est pas (f-) nef[13], alors il existe une courbe rationnelle Γ telle que $K_X \cdot \Gamma < 0$.
Soit $c_i : X/Z \to X_i/Z$ la contraction d'une arête R_i avec $-K_X \cdot R_i > 0$. Deux cas se présentent :

[12]Le lecteur débutant peut supposer X lisse.
[13]On rappelle qu'un fibré en droites L (ou un diviseur de Cartier) est nef, pour numériquement effectif, si $L \cdot C \geq 0$ pour toute courbe C, qu'il est f-nef si $L \cdot C \geq 0$ pour toute courbe C contenue dans une fibre de f.

- si $\dim(X_i) = \dim(X)$, c_i est une application birationnelle (on distingue alors en général deux sous-cas suivant que $\mathrm{Exc}(c_i)$ est de codimension 1 - on dit que c_i est *divisorielle* - ou que $\mathrm{Exc}(c_i)$ est de codimension ≥ 2 - on dit que c_i est *petite*),
- sinon $\dim(X_i) < \dim(X)$, c_i est alors une *fibration de Mori* dont la fibre générale est une variété de Fano (en général singulière).

Le bilan est donc le suivant sur un corps de caractéristique zéro : *si X est une variété projective (disons lisse ou à singularités terminales), soit K_X est nef, soit il y a une courbe rationnelle Γ telle que $-K_X \cdot \Gamma > 0$ contractée par une application birationnelle ou par une fibration dont la fibre générale est de Fano.*

Comme application du théorème du cône, démontrons la proposition suivante.

Proposition 15. *Soient X et Y deux variétés projectives à singularités terminales, avec Y $\mathbb{Q}$-factorielle, sur un corps de caractéristique zéro et $\pi : X \to Y$ un morphisme birationnel. Alors, si π n'est pas un isomorphisme, il existe une courbe rationnelle C contractée par π telle que $-K_X \cdot C > 0$.*

Démonstration[14]**.** L'hypothèse que Y est $\mathbb{Q}$-factorielle assure que le lieu exceptionnel de π est de codimension pure 1.
Ecrivons

$$K_X = \pi^* K_Y + \sum a_i E_i$$

où les E_i sont les composantes irréductibles de $\mathrm{Exc}(\pi)$ et les a_i sont tous > 0 (c'est ici que l'on utilise l'hypothèse que Y est à singularités terminales).
Par l'absurde, si K_X est ≥ 0 sur toute courbe rationnelle contractée par π, c'est que K_X est π-nef par le théorème du cône (que l'on peut appliquer puisque X est à singularités terminales). On en déduit que $\sum a_i E_i = K_X - \pi^* K_Y$ est aussi π-nef. Comme $\pi_*(-\sum a_i E_i) = 0$, le lemme de négativité[15] implique que les a_i sont tous ≤ 0 ce qui fournit la contradiction. ∎

2. Cinq notions mesurant la présence de courbes rationnelles.

On donne ici cinq notions permettant de mesurer la présence de courbes rationnelles. Rappelons à nouveau que les variétés et morphismes considérés sont définis sur un corps algébriquement clos de caractéristique arbitraire.

Définition 17. *Soit X une variété projective de dimension n. On dit que X est*

[14] Voir [Deb01] pour une preuve à la main quand X et Y sont lisses.
[15] Le lemme de négativité est le lemme suivant.

Lemme 16. (Lemme de négativité) *Soient $\pi : X \to Y$ un morphisme entre deux variétés projectives normales et B un $\mathbb{Q}$-diviseur de Cartier sur X. On suppose que $-B$ est π-nef. Alors B est effectif si et seulement si $\pi_* B$ est effectif.*

(1) *rationnelle s'il existe une application birationnelle* $\varphi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow X$*,*
(2) *unirationnelle s'il existe une application rationnelle dominante* $\varphi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow X$*,*
(3) *réglée s'il existe une variété projective* Y *de dimension* $n-1$ *et une application birationnelle* $\varphi : \mathbb{P}^1 \times Y \dashrightarrow X$*,*
(4) *uniréglée s'il existe une variété projective* Y *de dimension* $n-1$ *et une application rationnelle dominante* $\varphi : \mathbb{P}^1 \times Y \dashrightarrow X$*,*
(5) *rationnellement connexe s'il existe une variété quasi-projective* T *et un morphisme* $F : \mathbb{P}^1 \times T \to X$ *tels que le morphisme* $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times T \to X \times X$ *qui à* $(u, u', t) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times T$ *associe* $(F(u,t), F(u',t)) \in X \times X$ *soit dominant.*

Si X vérifie l'une des propriétés ci-dessus, alors X est couverte par des courbes rationnelles au sens où par tout point de X en position générale passe une courbe rationnelle. Même si ce cours traite par la suite de la connexité rationnelle, donnons quelques exemples et les liens entre ces cinq notions.

Remarques. Évidemment, X rationnelle implique X unirationnelle, X réglée implique X uniréglée. Comme $\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^1$ est une variété rationnelle, X rationnelle implique X réglée et X unirationnelle implique X uniréglée (sauf si $\dim(X) = 0$). Enfin, X unirationnelle implique X rationnellement connexe et X rationnellement connexe implique X uniréglée (sauf si $\dim(X) = 0$).

Les variétés de la forme $\mathbb{P}^1 \times Y$ où Y ne contient pas de courbes rationnelles sont réglées mais ne sont pas unirationnelles. Plus généralement, toutes les implications mentionnées ci-dessus sont connues pour être strictes à l'exception de la suivante : *on ne connait pas de variété rationnellement connexe non unirationnelle.* Mentionnons que toute cubique complexe lisse dans $\mathbb{P}^4$ est unirationnelle[16] et non rationnelle (il s'agit d'un résultat dû à Clemens et Griffiths). Mentionnons aussi (voir par exemple [Mar00] et [Mar06]) qu'il existe des quartiques lisses unirationnelles dans $\mathbb{P}^4$ et que les quartiques complexes lisses dans $\mathbb{P}^4$ ne sont pas rationnelles (la non rationalité est due à Iskovskikh et Manin).
Avant de mentionner le joli résultat de Kollár [Kol95], rappelons qu'une hypersurface lisse dans $\mathbb{P}^n$ de degré $d \leq n$ est de Fano, donc rationnellement connexe en caractéristique zéro comme nous le verrons au §6.

[16] Soient $X_3 \subset \mathbb{P}^4$ une cubique complexe lisse et L une droite contenue dans X_3, il en existe, on a même déjà vu que les droites contenues dans X_3 couvrent X_3. On note Σ l'ensemble des droites l de $\mathbb{P}^4$ telles qu'il existe $p \in L$ avec $p \in l \subset T_p(X_3)$. Si $q \in \mathbb{P}^4$ est un point général fixé et si $\Pi \subset \mathbb{P}^4$ est un 2-plan général fixé, l'application $\varphi : L \times \Pi \dashrightarrow \Sigma$ définie par $\varphi(p,r) = T_p(X_3) \cap \overline{pqr}$ est une application birationnelle, donc Σ est une variété rationnelle de dimension 3. Par ailleurs, si $l \in \Sigma$ est une droite tangente à X_3 passant par un point p de L, son intersection avec X_3 contient un deuxième point, permettant de définir ainsi une application rationnelle $\psi : \Sigma \dashrightarrow X_3$. Il est facile de voir que ψ est dominante, de degré 2.

Théorème 18. (Kollár) *Sur $\mathbb{C}$, une hypersurface très générale dans $\mathbb{P}^n$ de degré d vérifiant*

$$\frac{2}{3}(n+2) \leq d \leq n$$

n'est pas réglée (et n'est a fortiori *pas rationnelle).*

La preuve de ce résultat se fait en passant en caractéristique positive, Kollár construit dans le même article, *en caractéristique positive*, des exemples de variétés de Fano non séparablement rationnellement connexes (voir plus loin pour cette dernière notion).

Les cinq notions ci-dessus sont des notions birationnellement invariantes : si X est birationnellement équivalente à X', alors X est rationnelle (resp. unirationnelle, resp. réglée, resp. uniréglée, resp. rationnellement connexe) si et seulement si X' l'est.

D'une certaine façon, les variétés qui nous intéressent dans ce cours ont toutes un fibré canonique "négatif" en vertu du résultat profond suivant, dû à Boucksom, Demailly, Păun et Peternell : une variété est uniréglée si et seulement si son fibré canonique n'est pas "limite de diviseurs effectifs" [BDPP04] (voir aussi le survol [Deb06]).

Théorème 19. (Boucksom, Demailly, Păun et Peternell) *Soit X une variété projective complexe*[17] *lisse. Alors X est uniréglée si et seulement si K_X n'est pas pseudo-effectif*[18].

Il n'est pas question de démontrer ce résultat ici, mentionnons simplement une conséquence immédiate, beaucoup plus élémentaire, que nous démontrerons plus loin à l'aide des courbes rationnelles.

Proposition 20. *En caractéristique nulle, les plurigenres d'une variété projective lisse et uniréglée X sont tous nuls :*

$$\forall m > 0 \quad H^0(X, mK_X) = 0.$$

La réciproque est conjecturée.

Conjecture 1. *Soit X une variété projective lisse sur un corps de caractéristique zéro. Alors X est uniréglée si et seulement si les plurigenres de X sont tous nuls :*

$$\forall m > 0 \quad H^0(X, mK_X) = 0.$$

Cette conjecture est conséquence de la "Conjecture d'abondance", qui est, après les toutes dernières avancées du programme de Mori par Birkar, Cascini, Hacon et M^{c}Kernan, la conjecture majeure encore ouverte dans le programme de Mori.

[17] Les auteurs démontrent ce résultat en utilisant des techniques transcendantes. Ce théorème est maintenant conséquence des travaux de Birkar, Cascini, Hacon et M^{c}Kernan [BCHM10] et est donc valable sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro.

[18] Un diviseur de Cartier sur X est pseudo-effectif si sa classe dans $\mathrm{N}^1(X)$ est dans l'adhérence du cône engendré par les classes de diviseurs effectifs.

COURS 2

Dans ce deuxième cours, nous introduisons les notions de courbes rationnelles libres et très libres. L'étude de leurs déformations permet de caractériser les variétés (séparablement) rationnellement connexes en terme d'existence de telles courbes.

3. Connexité rationnelle. Courbes rationnelles libres et très libres.

Les résultats de cette section sont dus à Kollár, Miyaoka et Mori [KMM92]. Je me suis beaucoup appuyé sur [Deb01] et [AK03].

3.1. **Retour sur la définition de connexité rationnelle.**

Définition 21. *Soit X une variété projective de dimension n. On dit que X est rationnellement connexe s'il existe une variété quasi-projective T et un morphisme $F : \mathbb{P}^1 \times T \to X$ tels que le morphisme $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times T \to X \times X$ qui à $(u, u', t) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times T$ associe $(F(u, t), F(u', t)) \in X \times X$ soit dominant.*

Si X est lisse et le corps de base de caractéristique nulle, l'application tangente d'un morphisme dominant est génériquement de rang maximal. Ceci n'est plus vrai en caractéristique positive[19] et il s'avère nécessaire d'étendre un peu la notion de connexité rationnelle.

Définition 22. *Soit X une variété projective de dimension n. On dit que X est séparablement rationnellement connexe s'il existe une variété quasi-projective T et un morphisme $F : \mathbb{P}^1 \times T \to X$ tels que le morphisme $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times T \to X \times X$ qui à $(u, u', t) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times T$ associe $(F(u, t), F(u', t)) \in X \times X$ soit dominant et génériquement lisse.*

Soit X une variété projective. Pour chaque entier d, il y a d'après Grothendieck un schéma quasi-projectif de type fini, noté $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X)$, paramétrant les morphismes de degré d de $\mathbb{P}^1$ à valeurs dans X. Ce schéma n'est en général ni réduit, ni irréductible. Si $f : \mathbb{P}^1 \to X$ est un morphisme de degré d, on notera $[f] \in \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X)$ le point correspondant. Si X est lisse le long de l'image de f, l'espace tangent de Zariski de $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X)$ au point $[f]$ est isomorphe à $H^0(\mathbb{P}^1, f^*T_X)$ et $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X)$ est lisse au point $[f]$ dès que $H^1(\mathbb{P}^1, f^*T_X) = 0$.

Comme le degré d'un morphisme est constant en famille, on en déduit que si X est une variété rationnellement connexe, il existe un entier $d > 0$ tel que le morphisme naturel

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X) \to X \times X$$

soit dominant : autrement dit, si x et y sont généraux dans X (au sens où (x, y) est général dans $X \times X$), il y a une courbe rationnelle de degré d joignant x à y.

[19]En caractéristique positive, un morphisme dominant peut être de différentielle identiquement nulle : le morphisme de Frobenius $x \mapsto x^p$ est l'exemple le plus célèbre.

En particulier, si x est général dans X, alors par y général dans X passe une courbe rationnelle de degré d issue de x. Autrement dit, le morphisme $\mathbb{P}^1 \times \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X, 0 \mapsto x) \to X$ qui à $(u, [f])$ associe $f(u)$ est dominant[20].

Si le corps de base n'est pas dénombrable, on peut montrer la réciproque suivante. *Si par deux points généraux d'une variété projective X passe une courbe rationnelle, alors il existe un entier d tel que le morphisme naturel*

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X) \to X \times X$$

est dominant[21] *; X est donc rationnellement connexe.*

Il est important de noter que la variété $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X)$ n'est en général pas projective mais seulement quasi-projective : pour $X = \mathbb{P}^2$ et $0 \neq t \in \mathbb{C}$, la famille de morphismes

$$f_t([u : v]) = [t(u^2 - v^2) : 2tuv : u^2 + v^2]$$

ne se compactifie pas dans $\mathrm{Mor}_2(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^2)$ lorsque t tend vers 0 ou l'infini. Il y a un phénomène de “cassage” qui nous amènera à considérer des “chaînes de courbes rationnelles”.

3.2. **Courbes rationnelles libres et très libres.** Rappelons que le groupe de Picard de $\mathbb{P}^1$, et plus généralement celui de $\mathbb{P}^m$, est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et que l'on note $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)$ le générateur ample de ce groupe. En vertu d'un théorème dû à Grothendieck, tout fibré vectoriel E de rang $r \geq 1$ sur $\mathbb{P}^1$ s'écrit de façon unique $\oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$ pour des entiers $a_1 \geq \cdots \geq a_r$. Attention, l'énoncé correspondant sur $\mathbb{P}^m$, $m \geq 2$, est faux.

Exemple 1. *Si $m \geq 2$, le fibré tangent $T_{\mathbb{P}^m}$ n'est pas une somme directe de fibrés en droites. En revanche, pour toute droite $l \subset \mathbb{P}^m$, sa restriction à l l'est et la décomposition ne dépend pas de l :*

$$(T_{\mathbb{P}^m})_{|l} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus(m-1)}.$$

De même, $T_{\mathbb{P}^1} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$.

Pour démontrer les résultats principaux concernant les variétés rationnellement connexes, nous allons devoir déformer (et lisser) les (chaînes de) courbes rationnelles. Les courbes rationnelles se déforment d'autant plus facilement que leur fibré normal a tendance à être positif. Formalisons ceci à l'aide d'une définition maintenant classique.

[20] $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X, 0 \mapsto x)$ désigne le sous-schéma fermé de $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X)$ des morphismes $[f]$ vérifiant de plus $f(0) = x$. Plus généralement, on notera $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X, \forall i\, p_i \mapsto x_i)$ le sous-schéma fermé de $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X)$ des morphismes $[f]$ vérifiant de plus $f(p_i) = x_i$ pour tout $1 \leq i \leq r$. Son espace tangent au point $[f]$ est $H^0(\mathbb{P}^1, f^*T_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-\sum_{i=1}^r p_i))$, il est lisse au point $[f]$ si $H^1(\mathbb{P}^1, f^*T_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-\sum_{i=1}^r p_i)) = 0$ et sa dimension au point $[f]$ est toujours minorée par $-K_X \cdot f_*(\mathbb{P}^1) + (1 - r) \dim X$.

[21] Il suffit de considérer le schéma localement noethérien de type fini $\mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1, X)$ union *dénombrable* des $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X)$ pour $d \in \mathbb{N}$ et le morphisme associé.

Définition 23. *Soient X une variété projective de dimension n et $f\ :\mathbb{P}^1\to X$ une courbe rationnelle. On suppose que $f(\mathbb{P}^1)$ est contenu dans le lieu lisse X_{reg} de X. Ecrivons alors*

$$f^*T_X\simeq\oplus_{i=1}^n\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)\ \textit{avec}\ a_1\geq\cdots\geq a_n.$$

On dit que la courbe rationnelle f est

(1) *libre si $a_n\geq 0$,*
(2) *très libre si $a_n\geq 1$,*
(3) *r-libre (avec $r\geq 0$) si $a_n\geq r$.*

Un point important à retenir est que si f est libre, alors le schéma $\mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1,X)$ est lisse au point $[f]$, de dimension $h^0(\mathbb{P}^1,f^*T_X)=\dim H^0(\mathbb{P}^1,f^*T_X)=n+\sum_{i=1}^n a_i=-K_X\cdot f_*(\mathbb{P}^1)+n$. On parlera alors en particulier de *la* composante de $\mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1,X)$ contenant $[f]$. De plus, l'ensemble des morphismes r-libres est un ouvert de $\mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1,X)$[22]. Nous allons voir que les courbes libres se déforment beaucoup, nous permettant de caractériser les variétés lisses rationnellement connexes à l'aide des courbes très libres.

Théorème 24. *Soit X une variété projective lisse de dimension n.*

(1) *Si X contient une courbe rationnelle très libre $f\ :\mathbb{P}^1\to X$, alors pour tout sous-ensemble fini général $\{x_1,\dots,x_m\}$ de X, il existe une courbe rationnelle très libre sur X passant par tous les x_i dont le degré ne dépend que de celui de f et de m. En particulier, X est rationnellement connexe (et même séparablement rationnellement connexe).*
(2) *En caractéristique zéro, si X est rationnellement connexe, alors, par un point général de X passe une courbe très libre.*
(3) *En caractéristique quelconque, si X est séparablement rationnellement connexe, alors, par un point général de X passe une courbe très libre.*

Démonstration. Elle se fait en plusieurs étapes.

Etape 1. Soient $f\ :\mathbb{P}^1\to X$ une courbe r-libre ($r\geq 0$), s un entier ≥ 1 et

$$\mathrm{ev}^s:(\mathbb{P}^1)^s\times\mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1,X)^{\mathrm{red}}\to X^s$$

le morphisme qui à $(u_1,u_2,\dots,u_s,[g])\in(\mathbb{P}^1)^s\times\mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1,X)$ associe $(g(u_1),\dots,g(u_s))\in X^s$. Montrons que si $s\leq r+1$, alors ev^s est un morphisme lisse au voisinage du point $(u_1,u_2,\dots,u_s,[f])$ pour tout $(u_1,u_2,\dots,u_s)\in(\mathbb{P}^1)^s$.

En effet, soit T la composante de $\mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1,X)$ passant par $[f]$. On a vu que T est lisse au voisinage de $[f]$, de dimension $n+\sum_{i=1}^n a_i\geq n(r+1)$ (avec $f^*T_X\simeq\oplus_{i=1}^n\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$).

[22]Ceci vient du fait que f est r-libre si et seulement si $H^1(\mathbb{P}^1,f^*T_X\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-r-1))=0$ et du théorème de semi-continuité de la cohomologie.

Il suffit donc de montrer que pour tout $(u_1, u_2, \dots, u_s) \in (\mathbb{P}^1)^s$, la différentielle de ev^s est surjective au point $(u_1, u_2, \dots, u_s, [f])$. Cette différentielle n'est autre que l'application naturelle

$$\bigoplus_{i=1}^{s} T_{u_i}\mathbb{P}^1 \oplus H^0(\mathbb{P}^1, f^*T_X) \to \bigoplus_{i=1}^{s} T_{f(u_i)}X = \bigoplus_{i=1}^{s}(f^*T_X)_{f(u_i)}$$

qui à $(v_1, \dots, v_s, \sigma) \in \bigoplus_{i=1}^{s} T_{u_i}\mathbb{P}^1 \oplus H^0(\mathbb{P}^1, f^*T_X)$ associe

$$((Tf)_{u_1}(v_1) + \sigma(u_1), \dots, (Tf)_{u_s}(v_s) + \sigma(u_s)),$$

elle est donc surjective dès que pour tout $i = 1, \dots, n$, l'application d'évaluation

$$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)) \to \bigoplus_{j=1}^{s}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i))_{u_j}$$

l'est. C'est le cas si (et seulement si lorsque les u_j sont deux à deux distincts) $a_i \geq s - 1$. ■

Etape 2. Sous les hypothèses de l'étape 1, l'application $\mathrm{ev}^s : (\mathbb{P}^1)^s \times T \to X^s$ est donc dominante, autrement dit, par s points généraux de X passe une courbe r-libre déformation de f.

Etape 3. Montrons maintenant le point (1) du théorème. Soit $f : \mathbb{P}^1 \to X$ une courbe très libre, on écrit $f^*T_X \simeq \oplus_{i=1}^{n}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$ et soit $r := \min(a_i) \geq 1$. En composant f à la source par un morphisme $h_\delta : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ de degré δ, on obtient une courbe $r\delta$-libre, à savoir $f \circ h_\delta$. Des étapes précédentes, on déduit que si $r\delta + 1 \geq m$, alors par m points généraux de X passe une déformation de $f \circ h_\delta$.[23]

Etape 4. Supposons que X est rationnellement connexe. On a vu qu'il existe alors un entier d tel que le morphisme naturel

$$\mathrm{ev}^2 : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X)^{\mathrm{red}} \to X \times X$$

soit dominant. Quand la caractéristique du corps de base est supposée nulle, il existe $(u_1, u_2, [f]) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X)^{\mathrm{red}}$ tel que la différentielle de ev^2 en $(u_1, u_2, [f])$ soit surjective, et ceci étant une condition ouverte, on peut supposer $u_1 \neq u_2$. Un tel $(u_1, u_2, [f])$ existe aussi en caractéristique positive quand X est supposée séparablement rationnellement connexe (par définition !). Nous allons montrer que f est très libre.
A nouveau, la différentielle de ev^2 en $(u_1, u_2, [f])$ est l'application naturelle

$$T_{u_1}\mathbb{P}^1 \oplus T_{u_2}\mathbb{P}^1 \oplus H^0(\mathbb{P}^1, f^*T_X) \to T_{f(u_1)}X \oplus T_{f(u_2)}X$$

[23] On ne résiste pas ici au commentaire suivant : la preuve qui précède montre que si C est une courbe rationnelle très libre, un multiple suffisamment grand de C se déforme suffisamment pour passer par m points généraux de X. Ceci fonctionne bien car $\mathbb{P}^1$ possède des endomorphismes de degré arbitrairement grand, ceci fonctionnerait encore pour des courbes elliptiques. Pour des courbes de genre ≥ 2, ceci fonctionne encore en caractéristique positive seulement car on dispose du morphisme de Frobenius. Cette remarque géniale est due à Mori et est le point de départ de la théorie de Mori.

qui à $(v_1, v_2, \sigma) \in T_{u_1}\mathbb{P}^1 \oplus T_{u_2}\mathbb{P}^1 \oplus H^0(\mathbb{P}^1, f^*T_X)$ associe

$$((Tf)_{u_1}(v_1) + \sigma(u_1), (Tf)_{u_2}(v_2) + \sigma(u_2)).$$

Le point clé est le suivant : comme $T_{\mathbb{P}^1} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$, l'application $H^0(\mathbb{P}^1, T_{\mathbb{P}^1}) \to T_{u_1}\mathbb{P}^1 \oplus T_{u_2}\mathbb{P}^1$ est surjective, donc l'image de l'application $H^0(\mathbb{P}^1, f^*T_X) \to T_{f(u_1)}X \oplus T_{f(u_2)}X$ contient celle de $(Tf)_{u_1} \oplus (Tf)_{u_2} : T_{u_1}\mathbb{P}^1 \oplus T_{u_2}\mathbb{P}^1 \to T_{f(u_1)}X \oplus T_{f(u_2)}X$, d'où l'on déduit évidemment[24] que $H^0(\mathbb{P}^1, f^*T_X) \to T_{f(u_1)}X \oplus T_{f(u_2)}X$ est surjective. De là, si $f^*T_X \simeq \oplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$, chaque

$$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)) \to (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i))_{u_1} \oplus (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i))_{u_2}$$

est surjective, donc $a_i \geq 1$ pour tout i : f est très libre. ■

Le lecteur débutant pourra démontrer le strict analogue du théorème précédent pour les variétés uniréglées. Le résultat de l'étape 4 ci-dessus doit être adapté de la façon suivante : *si la différentielle de* $\mathrm{ev}^1 : \mathbb{P}^1 \times \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X)^{\mathrm{red}} \to X$ *est surjective au point* $(u, [f])$, *alors* f *est libre.*

Théorème 25. *Soit X une variété projective lisse de dimension n.*

(1) *Si X contient une courbe rationnelle libre, alors X est uniréglée.*
(2) *En caractéristique zéro, si X est uniréglée, alors par un point général de X passe une courbe libre. En particulier, si X est uniréglée, alors K_X n'est pas numériquement effectif.*

En caractéristique positive, les choses sont sont bien différentes comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2. *Soit*

$$X = \{[x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_0^d + \cdots + x_n^d = 0\}$$

l'hypersurface de Fermat de degré $d = p^r + 1$ dans $\mathbb{P}^n$ sur un corps algébriquement clos de caractéristique positive p. Alors X est unirationnelle si $n \geq 3$ (donc rationnellement connexe). Par ailleurs, si $d \geq n + 1$, le fibré canonique de X est numériquement effectif (son intersection avec toute courbe est ≥ 0), en particulier, X ne contient pas de courbes libres : la différentielle de $\mathrm{ev}^1 : \mathbb{P}^1 \times \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X) \to X$ *n'est donc jamais surjective.* A fortiori, *X n'est pas séparablement rationnellement connexe.*

Pour le confort du lecteur, énonçons deux corollaires, extraits de la preuve du théorème 24.

Corollaire 26. *Soit X une variété projective lisse sur un corps de caractéristique quelconque,*

[24]Si $f_1 : E_1 \to F$ et $f_2 : E_2 \to F$ sont deux applications linéaires telles que d'une part l'image de f_1 est contenue dans celle de f_2 et d'autre part $f_1 \oplus f_2 : E_1 \oplus E_2 \to F$ est surjectif, alors f_2 est surjectif.

(1) *X est séparablement rationnellement connexe si et seulement si par tout point général de X passe une courbe très libre,*
(2) *X est séparablement uniréglée si et seulement si par tout point général de X passe une courbe libre.*

Corollaire 27. *Soient X une variété projective et $f \ : \mathbb{P}^1 \to X$ une courbe rationnelle dont l'image est contenue dans le lieu lisse de X.*

(1) *En caractéristique quelconque,*
   (a) *f est très libre si et seulement s'il y a $(u_1, u_2, [f]) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1, X)$ tel que la différentielle de ev^2 en $(u_1, u_2, [f])$ est surjective,*
   (b) *f est libre si et seulement s'il y a $(u, [f]) \in \mathbb{P}^1 \times \mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1, X)$ tel que la différentielle de ev^1 en $(u, [f])$ est surjective.*
(2) *En caractéristique zéro,*
   (a) *f est très libre si et seulement si les déformations de f passent par deux points généraux de X.*
   (b) *f est libre si et seulement si les déformations de f dominent X.*

3.3. **Lieu des courbes libres et courbes libres minimales.** Avec les techniques précédentes, on montre la proposition suivante.

Proposition 28. *Soit X une variété projective lisse sur un corps de caractéristique zéro. Alors, il existe une intersection dénombrable d'ouverts non vides de X, notée X^{libre}, telle que toute courbe rationnelle dont l'image rencontre X^{libre} est libre. De plus, $X^{\mathrm{libre}} \neq \varnothing$ si et seulement si X est uniréglée.*

Démonstration. Considérons à nouveau le morphisme d'évaluation

$$\mathrm{ev}^1 : \mathbb{P}^1 \times \mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1, X) \to X.$$

Pour chaque composante irréductible M_i de $\mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1, X)$, deux situations sont possibles :

- soit $\overline{\mathrm{ev}^1(\mathbb{P}^1 \times M_i)} \neq X$, on pose $U_i = X \setminus \overline{\mathrm{ev}^1(\mathbb{P}^1 \times M_i)}$,
- soit $\overline{\mathrm{ev}^1(\mathbb{P}^1 \times M_i)} = X$, comme on a supposé que la caractéristique du corps de base est zéro, il y a un ouvert non vide U_i de X tel que pour tout $(u, [f]) \in \mathbb{P}^1 \times M_i^{\mathrm{red}}$, si $f(u) \in U_i$ alors la différentielle de ev^1 en $(u, [f])$ est surjective (en particulier, si $f(u) \in U_i$, alors f est libre).

Il est alors clair que $X^{\mathrm{libre}} := \cap_i U_i$ convient. ■

Le lecteur familier avec le lemme de cassage[25] l'utilisera associé aux techniques précédentes pour démontrer les deux premiers points du théorème suivant, le troisième est beaucoup plus difficile, il est dû à Cho, Miyaoka et Shepherd-Barron (voir [CMS02] ou [Keb02]).

Théorème 30. *Soit X une variété projective lisse uniréglée, de dimension n, sur un corps de caractéristique zéro. Soit H un diviseur ample sur X et $d = \min H \cdot h_*(\mathbb{P}^1)$ où le minimum est pris sur l'ensemble des courbes* **libres** *$h : \mathbb{P}^1 \to X$.*

(1) *Soit $f : \mathbb{P}^1 \to X$ une courbe libre telle que $d = H \cdot f_*(\mathbb{P}^1)$. Alors, il existe s tel que*
$$f^*T_X \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus s} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus n-1-s}.$$
(2) *Soient $x \in X^{\mathrm{libre}}$, $f : \mathbb{P}^1 \to X$ une courbe libre telle que $d = H \cdot f_*(\mathbb{P}^1)$ et $f(0) = x$. Soit M_x la composante de $\mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1, X, 0 \mapsto x)$ passant par $[f]$. Alors M_x est propre.*
(3) **(Cho, Miyaoka et Shepherd-Barron)** *S'il existe $f : \mathbb{P}^1 \to X$ une courbe libre telle que $d = \min H \cdot f_*(\mathbb{P}^1)$ et*
$$f^*T_X \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus n-1},$$
alors $X \simeq \mathbb{P}^n$.

Suivant les auteurs, les courbes libres $f : \mathbb{P}^1 \to X$ de degré minimal pour une polarisation donnée, ou plus généralement telles que la composante de $\mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1, X, 0 \mapsto x)$ passant par $[f]$ est propre pour x (très) général dans X sont dites *minimales*. L'étude des courbes libres minimales sur les variétés de Fano dont le rang du groupe de Picard vaut 1 est aussi l'objet de toute une série de travaux dus à Hwang et Mok, ainsi qu'à Kebekus.

[25]Il s'énonce de la façon suivante.

Théorème 29. (Lemme de cassage) *Soient X une variété projective et $f : \mathbb{P}^1 \to X$ une courbe rationnelle telle que $\dim_{[f]}(\mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1, X, 0 \mapsto f(0), \infty \mapsto f(\infty)) \geq 2$. Alors le 1-cycle $f_*(\mathbb{P}^1)$ est numériquement équivalent à un 1-cycle connexe passant par $f(0)$ et $f(\infty)$, effectif et non intègre de courbes rationnelles.*

Remarquons que l'on a toujours $\dim_{[f]} \mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1, X, 0 \mapsto f(0), \infty \mapsto f(\infty)) \geq 1$ car on peut composer f à la source par les automorphismes de $\mathbb{P}^1$ fixant 0 et ∞. Ce théorème affirme donc que si une courbe rationnelle se déforme "vraiment" en fixant deux points, alors elle dégénère en un cycle non irréductible et/ou non réduit de courbes rationnelles. Le lecteur calculera les dégénérescences de la famille des coniques planes
$$f_t([u : v]) = [t(u^2 - v^2) : 2tuv : u^2 + v^2]$$
passant par les deux points $[1 : \pm i : 0]$.

COURS 3

Dans ce troisième cours, nous introduisons la notion de connexité rationnelle par chaînes. Cette notion est beaucoup plus souple que la connexité rationnelle. Nous étudions aussi les techniques de lissage de chaînes de courbes rationnelles. Ces techniques seront utilisées au cours suivant pour montrer que les notions de connexité rationnelle par chaînes et de connexité rationnelle coïncident dans la catégorie des variétés projectives lisses sur un corps de caractéristique zéro.

4. Connexité rationnelle par chaînes. Techniques de lissage.

Les résultats de cette section sont dus à Kollár, Miyaoka et Mori [KMM92]. Je me suis à nouveau beaucoup appuyé sur [Deb01] et [AK03].

4.1. **Connexité rationnelle par chaînes.** On a vu précédemment que $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X)$ n'est pas projectif en général, mais seulement quasi-projectif. Le phénomène de dégénérescences qui intervient fait apparaître des chaînes de courbes rationnelles. On introduit ici la classe des variétés telles que par deux points généraux passe une chaîne de courbes rationnelles[26].

Définition 31. *Soit X une variété (quasi-) projective ou un schéma connexe. On dit que X est rationnellement connexe par chaînes s'il existe une variété quasi-projective T et un sous-schéma $\mathcal{C}$ de $T \times X$ tels que*

(1) *les fibres de la projection $p : \mathcal{C} \to T$ sont propres, connexes, de dimension 1 et toutes leurs composantes irréductibles sont rationnelles[27],*
(2) *la projection $e : \mathcal{C} \times_T \mathcal{C} \to X \times X$ est dominante.*

Si X est rationnellement connexe par chaînes, alors par deux points généraux x et x' de X, il existe $t \in T$ tel que x et x' appartiennent à $q(p^{-1}(t))$ où q est la projection $q : \mathcal{C} \to X$, autrement dit, la chaîne de courbes rationnelles $q(p^{-1}(t))$ passe par x et par x'.

Mise en garde. Contrairement aux notions précédemment rencontrées, cette notion n'est pas invariante par transformation birationnelle : si Y est un cône sur une variété projective Y_0, Y est rationnellement connexe par chaînes (passer par le sommet du cône). En revanche, le "cylindre" X obtenu en éclatant le sommet du cône n'est pas rationnellement connexe par chaînes si Y_0 ne l'est pas.

Exemple 3. *Sur un corps de caractéristique zéro, considérons*

$$\pi : \mathcal{X} = \{(w, x, y, z, t) \in \mathbb{P}^3_{w,x,y,z} \times \mathbb{A}^1_t \mid x^3 + y^3 + z^3 = tw^3\} \to \mathbb{A}^1_t.$$

[26] Une chaîne de courbes rationnelles est un schéma propre de dimension 1, connexe, dont toutes les composantes irréductibles sont des courbes rationnelles, courbe rationnelle signifiant **exceptionnellement** ici courbe dont la normalisée est $\mathbb{P}^1$.

[27] Courbe rationnelle signifie **(à nouveau exceptionnellement !)** ici courbe dont la normalisée est $\mathbb{P}^1$.

La variété $\mathcal{X}$ est lisse, étudions les fibres de π. Si $t \neq 0$, la fibre $\pi^{-1}(t)$ est une surface cubique lisse de $\mathbb{P}^3$; elle est rationnellement connexe par chaînes (deux points généraux peuvent être reliés par une chaîne formée d'une droite et de deux coniques), donc rationnellement connexe comme nous le verrons plus loin (théorème 38). Si $t = 0$, la fibre $\pi^{-1}(0)$ est un cône sur une courbe elliptique ; elle est rationnellement connexe par chaînes mais n'est pas rationnellement connexe.

Le fait que des chaînes de courbes rationnelles ne peuvent dégénérer qu'en des chaînes de courbes rationnelles implique que si X est rationnellement connexe par chaînes, alors par deux points *quelconques* de X passe une chaîne de courbes rationnelles.

Evidemment, les variétés rationnellement connexes sont rationnellement connexes par chaînes, le but des lignes qui suivent est de démontrer la réciproque pour les variétés lisses en caractéristique zéro.

4.2. **Lissage de chaînes de courbes rationnelles.** Cette section est plus technique, le lecteur débutant pourra prendre comme une boîte noire les deux théorèmes de lissage.

4.2.1. *Lissage des arbres de courbes rationnelles.*

Définition 32. *Un arbre de courbes rationnelles est un schéma C de dimension un, réduit, connexe dont les composantes irréductibles*

(1) *sont des courbes rationnelles lisses,*
(2) *peuvent être numérotées en choisissant arbitrairement l'une d'elles comme étant C_1 et de sorte que pour tout $i \geq 2$, C_i rencontre $C_1 \cup \cdots \cup C_{i-1}$ transversalement en un unique point lisse de $C_1 \cup \cdots \cup C_{i-1}$.*

Les seules singularités d'un arbre de courbes rationnelles sont donc des nœuds ordinaires, correspondant aux points d'intersection de deux composantes. Le graphe non orienté ayant pour sommets les composantes de C, avec une arête entre deux sommets si les deux composantes correspondantes s'intersectent, est un arbre.

Soient X une variété projective lisse, C un arbre de courbes rationnelles, $f : C \to X$ un morphisme et $p_1, \ldots, p_r$ des points lisses deux à deux distincts de C.

Définition 33. *On dit que f est lissable en fixant $f(p_1), \ldots, f(p_r)$ s'il existe*

(1) *une courbe quasi-projective lisse T avec un point distingué $o \in T$, une surface $\mathcal{C}$ et un morphisme plat $\pi : \mathcal{C} \to T$ tels que $\pi^{-1}(o) = C$ et $\pi^{-1}(t)$ est une courbe rationnelle lisse pour tout $t \in T \setminus \{o\}$,*
(2) *r sections $\sigma_i : T \to \mathcal{C}$ de π telles que $\sigma_i(o) = p_i$ pour tout i,*
(3) *un morphisme $F : \mathcal{C} \to X$ tel que $F_{|\pi^{-1}(o)} = f$ et $F(\sigma_i(T)) = f(p_i)$ pour tout i.*

Cette définition appelle quelques commentaires.

(i) Une surface $\mathcal{C}$ vérifiant les seuls points (1) et (2) de la définition est facile à construire en éclatant $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1$ convenablement.

(ii) Si f est lissable en fixant $f(p_1), \ldots, f(p_r)$, pour $t \neq o$, $F_t : \mathbb{P}^1 \to X$ est une courbe rationnelle (dont l'image peut être singulière) passant par $f(p_1), \ldots, f(p_r)$.

(iii) En général, f n'est pas lissable : supposons que S est une surface projective lisse et que $C \subset S$ est un arbre à deux composantes avec $C_1^2 = C_2^2 = -2$. Alors l'inclusion $C \subset S$ n'est pas lissable. En effet, il existe une surface singulière S_0, un morphisme birationnel $h : S \to S_0$ tels que $h(C) = x_0 \in S_0$ et $h : S \setminus C \simeq S_0 \setminus \{x_0\}$. Si $F : \mathcal{C} \to S$ est un lissage de f, notons F_t est la restriction de F à $\pi^{-1}(t)$. Par le lemme de rigidité, $h \circ F_t$ est constant pour tout $t \in T$ (on peut supposer T irréductible affine), donc F_t est constant pour tout $t \neq o$, ce qui est absurde.

(iv) Les géomètres italiens, mais aussi Noether ou Halphen, se sont intéressés au lissage de courbes gauches. Le lissage des arbres de courbes de $\mathbb{P}^3$ est étudié et utilisé par Hartshorne et Hirschowitz (voir [HH83] et le théorème 37 plus loin) ; Kollár a depuis donné le formalisme général dans son livre [Kol96].

Dans l'exemple (iii) ci-dessus, C_1 et C_2 ne sont pas des courbes libres ; bien au contraire, leur fibré normal est “très” négatif, ce qui assure que l'on peut les contracter sur un point. Le théorème qui suit montre que la situation est bien meilleure pour les courbes libres.

Théorème 34. *Soient X une variété projective lisse, C un arbre de courbes rationnelles, $f : C \to X$ un morphisme, $p_1, \ldots, p_r$ des points lisses distincts de C dont r_i exactement sont situés sur la composante C_i (chaque r_i est ≥ 0 ; en particulier, ils peuvent être tous nuls). Soient f_i, $1 \leq i \leq r$ les restrictions de f aux composantes C_i. Si f_1 est $(r_1 - 1)$-libre[28] et f_i est r_i-libre pour tout $i \geq 2$, alors f est lissable en fixant tous les $f(p_i)$ et on peut supposer que F_t est $(r-1)$-libre pour tout $o \neq t \in T$.*

Démonstration.
Etape 1. Soient une courbe lisse T avec un point distingué $o \in T$, une surface lisse $\mathcal{C}$ et un morphisme $\pi : \mathcal{C} \to T$ tels que $\pi^{-1}(o) = C$ et $\pi^{-1}(t)$ est une courbe rationnelle lisse pour tout $t \in T \setminus \{o\}$. Soient aussi r sections $\sigma_i : T \to \mathcal{C}$ de π telles que $\sigma_i(o) = p_i$. On l'a dit, ceci est facile à construire.

Etape 2. Si le morphisme F cherché existe, alors pour tout $t \in T$,

$$F_t \in \mathrm{Mor}(\pi^{-1}(t), X, \forall i\ \sigma_i(t) \mapsto f(p_i)).$$

D'après Mori, les schémas $\mathrm{Mor}(\pi^{-1}(t), X, \forall i\ \sigma_i(t) \mapsto f(p_i))$ s'assemblent en un T-schéma

$$\rho : \mathrm{Mor}(\mathcal{C}, X, \forall i\ \sigma_i(T) \mapsto f(p_i)) \to T$$

[28]Dans le cas où $r_1 = 0$, ceci signifie que tous les a_i sont ≥ -1 dans la décomposition $f_1^* T_X \simeq \oplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$.

tel que $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}, X, \forall i\ \sigma_i(T) \mapsto f(p_i))_t \simeq \mathrm{Mor}(\pi^{-1}(t), X, \forall i\ \sigma_i(t) \mapsto f(p_i))$.
Comme dans la version absolue, il y a un critère simple permettant de comprendre le schéma

$$\mathrm{Mor}(\mathcal{C}, X, \forall i\ \sigma_i(T) \mapsto f(p_i))$$

au voisinage d'un point $[h]$: si

$$[h] \in \mathrm{Mor}(\pi^{-1}(t_0), X, \forall i\ \sigma_i(t_0) \mapsto f(p_i))$$

et si $H^1(\pi^{-1}(t_0), h^*T_X \otimes \mathcal{O}_{\pi^{-1}(t_0)}(-\sum_{i=1}^r \sigma_i(t_0))) = 0$, alors ρ est un morphisme lisse au point $[h]$. En particulier $\mathrm{Mor}(\pi^{-1}(t_0), X, \forall i\ \sigma_i(t_0) \mapsto f(p_i))$ est lisse au point $[h]$ de dimension

$$\dim H^0(\pi^{-1}(t_0), h^*T_X \otimes \mathcal{O}_{\pi^{-1}(t_0)}(-\sum_{i=1}^r \sigma_i(t_0)))$$

et $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}, X, \forall i\ \sigma_i(T) \mapsto f(p_i))$ est irréductible au point $[h]$ de dimension

$$\dim H^0(\pi^{-1}(t_0), h^*T_X \otimes \mathcal{O}_{\pi^{-1}(t_0)}(-\sum_{i=1}^r \sigma_i(t_0))) + \dim T.$$

En particulier encore, **et c'est ce qu'il faut retenir ici**, *si $f : C \to X$ est le morphisme à lisser en fixant les $f(p_i)$ et si $H^1(C, f^*T_X \otimes \mathcal{O}_C(-\sum_i p_i)) = 0$, alors la composante de*

$$\mathrm{Mor}(\mathcal{C}, X, \forall i\ \sigma_i(T) \mapsto f(p_i))$$

passant par $[f]$ domine T. Il existe donc une courbe (que l'on peut supposer lisse)

$$T' \to \mathrm{Mor}(\mathcal{C}, X, \forall i\ \sigma_i(T) \mapsto f(p_i))$$

passant par $[f]$ et dominant T. Le morphisme naturel

$$\mathcal{C} \times_T T' \to X$$

fournit le morphisme $F : \mathcal{C} \times_T T' \to X$ cherché !

Etape 3. Terminons la preuve dans le cas où il n'y a que deux composantes : au vu de ce qui précède, il suffit de montrer que $H^1(C, f^*T_X \otimes \mathcal{O}_C(-\sum_{i=1}^r p_i)) = 0$ (par semi-continuité, on aura aussi $H^1(\pi^{-1}(t), F_t^*T_X \otimes \mathcal{O}_{\pi^{-1}(t)}(-\sum_{i=1}^r \sigma_i(t))) = 0$ pour tout t quitte à rétrécir T, ce qui implique que F_t est $(r-1)$-libre).
Si $q = C_1 \cap C_2$, considérons la suite exacte suivante :

$$0 \to \mathcal{O}_{C_2}(-q - p_{r_1+1} - \cdots - p_r) \to \mathcal{O}_C(-p_1 - \cdots - p_r) \to \mathcal{O}_{C_1}(-p_1 - \cdots - p_{r_1}) \to 0$$

où l'on a réordonné les p_i de sorte que les r_1 premiers soient sur C_1. Après tensorisation par f^*T_X et passage à la suite exacte longue de cohomologie associée, on en déduit la suite exacte suivante :

$$H^1(C_2, f_2^*T_X \otimes \mathcal{O}_{C_2}(-q - \sum_{i=r_1+1}^{r} p_i))) \to H^1(C, f^*T_X \otimes \mathcal{O}_C(-\sum_{i=1}^{r} p_i))$$
$$\to H^1(C_1, f_1^*T_X \otimes \mathcal{O}_{C_1}(-\sum_{i=1}^{r_1} p_i))).$$

Comme f_1 est $(r_1 - 1)$-libre et f_2 est r_2-libre, les deux groupes extrêmes sont nuls[29], ce qui fournit le résultat. ■

4.2.2. *Lissage des peignes.*

Définition 35. *Un peigne rationnel C est un arbre de $m+1$ courbes rationnelles lisses, avec une composante distinguée D (la poignée) et m dents $C_1, \dots, C_m$ deux à deux disjointes, chaque dent C_i rencontrant D transversalement en un unique point $q_i := D \cap C_i$, $i = 1, \dots, m$.*

Dans cette définition, il y a donc une composante privilégiée, à savoir la poignée. Le théorème suivant permet de lisser des peignes rationnels sans que la poignée ne soit supposée libre. C'est une différence majeure avec le paragraphe précédent où toutes les composantes étaient supposées libres pour permettre le lissage.

Théorème 36. *Soient X une variété projective lisse, C un peigne rationnel à m dents et $f\ : C \to X$ un morphisme. On suppose que la restriction de f à chaque dent est libre et on se donne $r \geq 0$ points lisses $p_1, \dots, p_r$ de C, situés sur la poignée. Si*

$$m > K_X \cdot f_*D + (r-1)\dim X + \dim_{[f_{|D}]} \mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1, X, \forall i\ p_i \mapsto f(p_i)),$$

alors il existe un sous-peigne C' de C avec la même poignée et avec au moins une dent tel que $f_{|C'}$ soit lissable en fixant les p_i[30] *.*

Démonstration.
Etape 1. Soit $\mathcal{C}_m \to D \times \mathbb{A}^m$ l'éclatement de $D \times \mathbb{A}^m$ le long des m sous-variétés disjointes $\{q_i\} \times \{y_i = 0\}$ de codimension 2 dans $D \times \mathbb{A}^m$ (on note $E_i \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^{m-1} \subset \mathcal{C}_m$ le diviseur exceptionnel au dessus de $\{q_i\} \times \{y_i = 0\}$). Soit $\pi : \mathcal{C}_m \to \mathbb{A}^m$ la projection induite. La fibre au-dessus de $0 \in \mathbb{A}^m$ est le peigne C ; plus généralement, la fibre de π au-dessus de $y \in \mathbb{A}^m$ est un peigne de poignée D dont le nombre de dents est égal au nombre de y_i égaux à zéro. Il est important de remarquer le fait facile suivant. Pour $1 \leq m' < m$, si $V_{m'} := \{y \in \mathbb{A}^m \mid y_1 = \cdots = y_{m'} = 0\}$, alors l'image inverse $\pi^{-1}(V_{m'})$ possède $m' + 1$

[29] Rappelons que $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)) = 0$ si et seulement si $a \geq -1$.

[30] La preuve de ce théorème ne permet pas de contrôler la différence $C \setminus C'$. Dans [GHS03], les auteurs démontrent un théorème de lissage de peigne avec toutes les dents, pour peu que les dents soient "générales". Ceci est aussi discuté dans le cours d'Olivier Wittenberg.

composantes irréductibles de dimension $m-m'+1$ décrites ainsi : pour chaque $1 \leq i \leq m'$, $E_i \cap \pi^{-1}(V_{m'}) \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^{m-m'}$ est une composante irréductible de $\pi^{-1}(V_{m'})$, la dernière est isomorphe à la variété $\mathcal{C}_{m-m'}$ obtenue en éclatant $D \times V_{m'} \simeq D \times \mathbb{A}^{m-m'}$ le long des $m-m'$ sous-variétés disjointes $\{q_i\} \times \{y_i = 0\}$ pour $i > m'$. La fibre de $\mathcal{C}_{m-m'} \to \mathbb{A}^{m-m'}$ au dessus de 0 est le sous-peigne $C' = D \cup C_{m'+1} \cup \cdots \cup C_m$ de C.
Remarquons qu'il y a aussi r sections $\sigma_i : \mathbb{A}^m \to \mathcal{C}_m$ de π telles que $\sigma_i(0) = p_i \in D \subset C = \pi^{-1}(0)$.

Etape 2. A nouveau, les schémas $\mathrm{Mor}(\pi^{-1}(y), X, \forall i\ \sigma_i(y) \mapsto f(p_i))$ s'assemblent en un $\mathbb{A}^m$-schéma

$$\mathrm{Mor}(\mathcal{C}_m, X, \forall i\ \sigma_i(\mathbb{A}^m) \mapsto f(p_i)) \to \mathbb{A}^m$$

tel que $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}_m, X, \forall i\ \sigma_i(\mathbb{A}^m) \mapsto f(p_i))_y \simeq \mathrm{Mor}(\pi^{-1}(y), X, \forall i\ \sigma_i(y) \mapsto f(p_i))$.
Montrons que

$$\dim_{[f]} \mathrm{Mor}(\mathcal{C}_m, X, \forall i\ \sigma_i(\mathbb{A}^m) \mapsto f(p_i)) > \dim_{[f]} \mathrm{Mor}(C, X, \forall i\ p_i \mapsto f(p_i)).$$

Le membre de droite est facile à estimer : un morphisme de C dans X est déterminé par sa restriction à chaque composante, et les morphismes correspondants doivent coïncider aux points d'intersections. Pour les dents, les espaces de morphismes sont lisses en $[f_{|C_i}]$, d'espace tangent $H^0(C_i, f^*_{|C_i} T_X \otimes \mathcal{O}_{C_i}(-p_i))$ puisque les dents sont libres. Or, si $a \geq 0$, $\dim H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a-1)) = a$, il vient donc :

$$\dim_{[f]} \mathrm{Mor}(C, X, \forall i\ p_i \mapsto f(p_i)) \leq \sum_{i=1}^{m} (-K_X \cdot f_* C_i) + \dim_{[f_{|D}]} \mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1, X, \forall i\ p_i \mapsto f(p_i)).$$

Le membre de gauche est lui minoré par $-K_X \cdot f_* C + (1-r) \dim X + m$. L'inégalité cherchée découle donc de l'hypothèse.

Etape 3. Il y a donc une courbe T passant par $[f]$ dans $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}_m, X, \forall i\ \sigma_i(\mathbb{A}^m) \mapsto f(p_i))$ qui ne s'envoie pas sur 0 dans $\mathbb{A}^m$. Si l'image de T rencontre $(k^*)^m \subset \mathbb{A}^m$, c'est gagné : le morphisme $f\ : C \to X$ est lissable sans avoir à "enlever de dents". Sinon, quitte à renuméroter les coordonnées, on peut supposer que $y_1, \ldots, y_{m'}$ sont les coordonnées qui s'annulent sur l'image de T : $\pi(T) \subset V_{m'} := \{y \in \mathbb{A}^m \mid y_1 = \cdots = y_{m'} = 0\}$ et $\pi(T)$ rencontre l'ouvert $(k^*)^{m-m'} \subset V_{m'} \simeq \mathbb{A}^{m-m'}$. Comme T ne s'envoie pas sur 0, on a $m' < m$. On a alors

$$T \subset \mathrm{Mor}(\pi^{-1}(V_{m'}), X, \forall i\ \sigma_i(V_{m'}) \mapsto f(p_i)).$$

Or, on a vu à l'étape 1 que l'une des composantes de $\pi^{-1}(V_{m'})$ est isomorphe à $\mathcal{C}_{m'}$ pour $m' < m$ si bien que T fournit un lissage d'un sous-peigne C' de C possédant $m - m' > 0$ dents. ■

Remarques.

(i) Il est important de comprendre où l'on a utilisé que les dents sont libres. La preuve ci-dessus montre qu'une inégalité de la forme

$$m > \sum_{i=1}^{m} (\dim H^0(C_i, f^*_{|C_i} T_X \otimes \mathcal{O}_{C_i}(-q_i)) - (-K_X \cdot f_* C_i)) \\ + K_X \cdot f_* D + (r-1) \dim X + \dim_{[f_{|D}]} \mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1, X, \forall i \ p_i \mapsto f(p_i))$$

suffit pour lisser un sous-peigne, sauf qu'une telle inégalité n'est en général pas satisfaite si les quantités positives ou nulles $\dim H^0(C_i, f^*_{|C_i} T_X \otimes \mathcal{O}_{C_i}(-q_i)) - (-K_X \cdot f_* C_i)$ ne sont pas nulles, ce que garantit l'hypothèse C_i libre.

(ii) On n'a pas réellement utilisé le fait que la poignée soit une courbe rationnelle. Le lecteur pourra prouver un énoncé analogue dans le cas d'une poignée quelconque. Il faut bien sûr adapter la notion de lissage, la fibre générale du lissage devant être une courbe lisse dont le genre est celui du peigne.

Je ne sais pas quelle est l'origine exacte de l'idée illustrée par le théorème précédent, à savoir qu'on peut lisser toute courbe si on lui attache suffisamment de courbes libres. Hartshorne et Hirschowitz démontrent par exemple le théorème suivant [HH83].

Théorème 37. (Hartshorne et Hirschowitz) *Soit D une courbe lisse dans $\mathbb{P}^3$ et soit*

$$X = D \cup L_1 \cup \cdots \cup L_m$$

un peigne de poignée D dont les dents L_i sont des droites. Si $m > \dim H^1(D, N_{D/\mathbb{P}^3}) + 1$, alors X est lissable (en une famille de courbes lisses dont le genre dépend de celui de D et de m).

COURS 4

Dans ce quatrième cours, nous montrons que les notions de connexité rationnelle par chaînes et de connexité rationnelle coïncident dans la catégorie des variétés projectives lisses sur un corps de caractéristique zéro. Plusieurs applications sont données, notamment à l'étude des variétés de Fano.

5. Connexité rationnelle *versus* connexité rationnelle par chaînes. Applications.

5.1. **Une équivalence remarquable.** Voici le résultat principal de cette partie.

Théorème 38. *Soit X une variété projective lisse sur un corps de caractéristique zéro. Si X est rationnellement connexe par chaînes, alors par tout sous-ensemble fini de X passe une courbe rationnelle très libre (définie sur une extension non dénombrable du corps de base).*

Le corollaire suivant est très utile.

Corollaire 39. *Soit X une variété projective lisse sur un corps de caractéristique zéro. Alors X est rationnellement connexe si et seulement si X est rationnellement connexe par chaînes.*

Démonstration du corollaire. Supposons X rationnellement connexe par chaînes. D'après le théorème 38, il existe un corps K extension non dénombrable de k et une courbe rationnelle très libre $f : \mathbb{P}^1_K \to X_K$ définie sur K. La courbe f est définie sur une extension de type fini de k, *i.e.* sur le corps $k(U)$ d'une k-variété U. En d'autres termes, il y a une famille paramétrée par U de k-courbes rationnelles très libres. La variété X est donc (k-) rationnellement connexe. ■

Nous verrons plus loin que si X est une variété de Fano non singulière sur un corps algébriquement clos de caractéristique arbitraire, alors X est rationnellement connexe par chaînes (ce résultat est d'ailleurs plus facile en caractéristique positive qu'en caractéristique nulle). On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 40. *Soit X une variété projective lisse sur un corps de caractéristique zéro. Si X est de Fano, alors X est rationnellement connexe.*

La démonstration du théorème utilise le fait suivant (voir sa preuve dans le livre de Debarre, facile une fois qu'on a écrit que X^{libre} est une intersection dénombrable décroissante d'ouverts).

Fait. Soit X une variété projective lisse sur un corps non dénombrable. Soient $\pi : \mathcal{C} \to T$ un morphisme propre et plat de dimension relative 1, où T est irréductible et $F : \mathcal{C} \to X$. Soit o un point distingué de T. Si l'image de F_o rencontre X^{libre}, alors il existe une famille dénombrable d'ouverts non vides T_i de T telle que pour tout $t \in \cap_i T_i$, l'image de $F_t : \pi^{-1}(t) \to X$ rencontre X^{libre}. Autrement dit, il faut retenir le slogan : *toute déformation très générale d'une chaîne de courbes rationnelles rencontrant* X^{libre} *rencontre aussi* X^{libre}.

Evidemment, ce fait serait trivial si X^{libre} était un ouvert de X, ce qu'il n'est pas en général[31]. En revanche, si X est uniréglée sur un corps non dénombrable, alors X^{libre} est dense dans X.

Démonstration du théorème 38. C'est très joli et ça se fait en plusieurs étapes. Soit K un corps algébriquement clos non dénombrable extension du corps de base k. Dans toute la suite de cette preuve, on travaille sur K.

Etape 1. Démontrons le lemme préliminaire suivant.

Lemme 41. *Soit* X *une variété projective. Supposons qu'il existe* $f : \mathbb{P}^1 \to f_*(\mathbb{P}^1) = D \subset X$ *une courbe rationnelle sur* X *et* $h : \mathbb{P}^1 \to X$ *une courbe rationnelle libre* dont l'image rencontre X^{libre} *telles que* $h(0) = x \in D$. *Soit* $y \in D$ *distinct de* x. *Alors il existe une courbe rationnelle rencontrant* X^{libre} *et passant par* x *et par* y.

En effet, comme h est libre, l'application d'évaluation en 0, $\mathrm{ev}_0 : M \to X$ est dominante (où M est la composante de $\mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1, X)$ passant par $[h]$ et où $\mathrm{ev}_0([g]) = g(0)$). Comme son image rencontre D, sa restriction $\mathrm{ev}_0 : \mathrm{ev}_0^{-1}(D) \to D$ domine D. Par le fait ci-dessus, on en déduit que par un point très général de D passe une courbe libre déformation de h dont l'image rencontre X^{libre}. Si $x_1, \ldots, x_m$ sont très généraux dans D (donc distincts de x et y), il existe donc une courbe C_i libre passant par x_i. Pour m suffisamment grand, le peigne $D \cup C_1 \cup \cdots \cup C_m$ de poignée D et de dents les C_i, possède un sous-peigne C' lissable à x et y fixés. Comme C' possède au moins une dent, C' rencontre X^{libre}, une déformation très générale de C' rencontre X^{libre} donc est libre en appliquant à nouveau le fait ci-dessus. ∎

Etape 2. Soient $(x_1, x_2) \in X^{\text{libre}} \times X$ et C une chaîne de courbes rationnelles joignant x_1 à x_2. Quitte à supprimer et renuméroter des maillons, on peut supposer que $C = C_1 \cup \cdots \cup C_k$ avec $x_1 \in C_1$, $x_2 \in C_k$ et $C_{i-1} \cap C_i \neq \varnothing$ pour $i = 1, \ldots, k-1$. Comme $x_1 \in X^{\text{libre}}$, C_1 est libre. Choisissons un point x dans $C_1 \cap C_2$ et un point y dans $C_2 \cap C_3$ (on peut supposer que $y \neq x$ car si $C_1 \cap C_2 = C_2 \cap C_3$, on supprime alors la courbe C_2 de la chaîne C). Le lemme 41 montre qu'il y a une courbe rencontrant X^{libre} et passant par x et y : on a ainsi remplacé C_2 par une courbe rencontrant X^{libre}, déformation d'un peigne de poignée C_2, dans la chaîne C. En itérant ce procédé, on construit une chaîne, passant par x_1 et x_2, de courbes rationnelles rencontrant toutes X^{libre}.

[31]Si S est une surface rationnelle avec une infinité dénombrable de (-1)-courbes, S^{libre} est certainement contenu dans le complémentaire de ces (-1)-courbes.

Etape 3. Lissons la chaîne de courbes rationnelles obtenue à l'étape précédente, en fixant x_2 ; c'est possible grâce au théorème de lissage des arbres de courbes rationnelles libres.

Etape 4. Le bilan des trois étapes précédentes est le suivant : si X est rationnellement connexe par chaînes, pour tout point $x_2 \in X$, l'image de

$$\mathrm{ev}^1 : \mathbb{P}^1 \times \mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1, X, 0 \mapsto x_2) \to X$$

contient X^{libre} dans son adhérence. Comme X^{libre} est dense, cette application est dominante et il y a une composante M de $\mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1, X, 0 \mapsto x_2) \to X$ tel que $\mathrm{ev}^1 : \mathbb{P}^1 \times M \to X$ soit dominante. Soit $[f] \in M$ une courbe libre. La composante M est lisse au point $[f]$ et comme les déformations de f fixant x_2 dominent X, on en déduit que f est très libre. Répétons cet argument qui nous a déjà servi dans la preuve du théorème 8 et qui, je l'espère, est devenu familier au lecteur.

En effet, il y a (comme la caractéristique du corps de base est supposée nulle) $(u, [f]) \in \mathbb{P}^1 \times M$ tel que la différentielle de ev^1 en $(u, [f])$ soit surjective. A nouveau, la différentielle de ev^1 en $(u, [f])$ est l'application naturelle

$$T_u\mathbb{P}^1 \oplus H^0(\mathbb{P}^1, f^*T_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) \to T_{f(u)}X$$

qui à $(v, \sigma) \in T_u\mathbb{P}^1 \oplus H^0(\mathbb{P}^1, f^*T_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))$ associe $(Tf)_u(v) + \sigma(u)$. Le point clé est le suivant : comme $T_{\mathbb{P}^1} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$, l'application $H^0(\mathbb{P}^1, T_{\mathbb{P}^1}) \to T_u\mathbb{P}^1$ est surjective, donc l'image de l'application $H^0(\mathbb{P}^1, f^*T_X) \to T_{f(u)}X$ contient celle de $(Tf)_u : T_u\mathbb{P}^1 \to T_{f(u)}X$, d'où l'on déduit évidemment que $H^0(\mathbb{P}^1, f^*T_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) \to T_{f(u)}X$ est surjectif. De là, si $f^*T_X \simeq \oplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$, chaque

$$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i - 1)) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)_u$$

est surjectif, donc $a_i \geq 1$ pour tout i : f est très libre.

Etape 5. Montrons que par deux points quelconques x et y passe une courbe très libre.

C'est facile, il suffit de joindre x et y à un point z très général à l'aide de courbes très libres, puis de lisser à l'aide du théorème de lissage des arbres.

Etape 6. Montrons finalement que par tout sous-ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_m\}$ de X passe une courbe rationnelle très libre.

On le fait par récurrence sur m, on vient de voir le cas $m = 2$. Soit alors $f : \mathbb{P}^1 \to X$ une courbe très libre passant par $x_1, \ldots, x_{m-1}$ et soit une courbe très libre passant par x_m et un point auxiliaire de $f(\mathbb{P}^1)$. Quitte à composer f à la source, on peut supposer que f est r-libre avec r suffisamment grand pour qu'on puisse lisser cet arbre à deux composantes en fixant tous les x_i. ■

En étant un peu plus soigneux, il est possible de borner le degré des courbes très libres ainsi construites en fonction du nombre de maillons nécessaires pour joindre deux points généraux de X par une chaîne de courbes rationnelles[32]. On renvoie à nouveau au livre d'O. Debarre.

5.2. **Deux applications.**

5.2.1. On montre que sur un corps de caractéristique zéro, la connexité rationnelle est une propriété ouverte et fermée des variétés projectives lisses.

Théorème 42. *On suppose que le corps de base est de caractéristique zéro. Soit T une variété quasi-projective et soit $\pi : \mathcal{X} \to T$ un morphisme projectif lisse. S'il existe $t_0 \in T$ tel que $X_{t_0} := \pi^{-1}(t_0)$ soit rationnellement connexe, alors X_t est rationnellement connexe pour tout $t \in T$.*

Démonstration.
Etape 1. La connexité rationnelle est une propriété ouverte.

Soit en effet $f \ : \mathbb{P}^1 \to X_{t_0}$ une courbe très libre de X_{t_0}. On voit aussi f comme une courbe libre de $\mathcal{X}$. Le schéma $\mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1, \mathcal{X})$ est lisse au point $[f]$, les déformations de f dominent $\mathcal{X}$ et sont verticales par le lemme de rigidité : si h est une déformation de f, son image est contenue dans une fibre X_t et h est alors une courbe très libre de X_t par un argument de semi-continuité de la cohomologie par exemple.

Etape 2. La connexité rationnelle est une propriété fermée.

On suppose que T est une courbe et que X_t est rationnellement connexe pour $t \neq t_\infty$ Si x_∞ et y_∞ sont deux points de X_{t_∞}, on les approche par x_t et y_t dans X_t. Une courbe rationnelle C_t contenue dans X_t et passant par x_t et y_t dégénère en une chaîne de courbes rationnelles contenue dans X_{t_∞} et passant par x_∞ et y_∞. Autrement dit, X_{t_∞} est rationnellement connexe par chaînes, donc rationnellement connexe par le théorème précédent.[33] ■

5.2.2. *Simple-connexité.* Dans ce paragraphe, on travaille sur $\mathbb{C}$. Notre objectif est de démontrer que les variétés lisses rationnellement connexes sont simplement connexes.
La première étape est de démontrer que si X est lisse et rationnellement connexe par chaînes, alors son groupe fondamental est fini. On utilise ici une jolie astuce due à Campana. Elle repose sur un lemme de géométrie différentielle que nous admettrons ici.

[32]Ce type de résultat permet par exemple de montrer que sur un corps non dénombrable, si deux points généraux sont joignables par une chaîne de courbes rationnelles, alors deux points quelconques peuvent être joints par une chaîne de courbes rationnelles.

[33]Plus efficacement, il suffit de dire que de façon générale, la connexité rationnelle par chaînes est une propriété fermée.

Lemme 43. *Soit $f : V \to W$ un morphisme dominant avec W normale. Alors l'image du morphisme induit $\pi_1(f) : \pi_1(V) \to \pi_1(W)$ est d'indice fini dans $\pi_1(W)$. En particulier, si cette image est triviale, alors $\pi_1(W)$ est fini.*

Soient X une variété rationnellement connexe et $f : \mathbb{P}^1 \to X$ une courbe très libre. On a vu que les déformations de f à point fixé dominent X, autrement dit, si $M \subset \mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1, X, 0 \mapsto f(0))$ est la composante passant par f, l'application d'évaluation $\mathrm{ev}^1 : \mathbb{P}^1 \times M \to X$ est dominante. L'injection $\iota : \{0\} \times M \hookrightarrow \mathbb{P}^1 \times M$ induit un isomorphisme au niveau des groupes fondamentaux. On en déduit que l'image de $\pi_1(\mathrm{ev}^1) : \pi_1(\mathbb{P}^1 \times M) \to \pi_1(X)$ est égale à l'image de la composée $\pi_1(\mathrm{ev}^1 \circ \iota) : \pi_1(\{0\} \times M) \to \pi_1(X)$ qui est triviale puisque $\mathrm{ev}^1 \circ \iota$ est constant égal à $f(0)$! Par le lemme, $\pi_1(X)$ est fini.

Proposition 44. *Soit X une variété projective lisse rationnellement connexe sur $\mathbb{C}$. Alors*

$$H^0(X, (\wedge^m T_X^*)^{\otimes p}) = 0$$

pour tous m et p strictement positifs. En particulier, $\chi(X, \mathcal{O}_X) = 1$.

Démonstration. Si f est une courbe très libre, $f^*(\wedge^m T_X^*)^{\otimes p})$ est une somme de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b_i)$ avec tous les b_i strictement négatifs. On a donc

$$H^0(\mathbb{P}^1, f^*(\wedge^m T_X^*)^{\otimes p}) = 0,$$

donc toute section de $(\wedge^m T_X^*)^{\otimes p}$ s'annule sur l'image de f, donc est identiquement nulle puisque les courbes très libres dominent X. Enfin, on a

$$\dim H^j(X, \mathcal{O}_X) = \dim H^0(X, \wedge^j T_X^*) = 0^{34}$$

si $j > 0$, donc $\chi(X, \mathcal{O}_X) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_X) = 1$[35]. ■

On peut maintenant prouver le théorème annoncé.

Théorème 45. *Soit X une variété lisse projective et rationnellement connexe par chaînes sur $\mathbb{C}$. Alors X est simplement connexe.*

Démonstration. Comme $\pi_1(X)$ est fini, le revêtement universel $\rho : \tilde{X} \to X$ est encore une variété projective lisse rationnellement connexe[36]. Comme ρ est étale, on a $\rho^* T_X = T_{\tilde{X}}$

[34] L'égalité $\dim H^j(X, \mathcal{O}_X) = \dim H^0(X, \wedge^j T_X^*)$ est fausse en caractéristique positive. En caractéristique zéro, cette égalité provient de la théorie de Hodge.

[35] Exercice : adapter la preuve précédente pour montrer que si X est une variété projective lisse uniréglée sur un corps de caractéristique zéro, alors $H^0(X, mK_X) = 0$ pour tout $m > 0$.

[36] Une courbe rationnelle très libre sur X se relève en une courbe rationnelle très libre sur $\tilde{X}$ car $\mathbb{P}^1$ est simplement connexe.

et $\mathcal{O}_{\tilde{X}} = \rho^*\mathcal{O}_X$. On a donc, si $n := \dim X = \dim \tilde{X}$, d'après le théorème de Riemann-Roch,

$$\begin{aligned} 1 = \chi(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = \deg(\mathrm{td}(T_{\tilde{X}}))_n &= \deg(\mathrm{ch}(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \cdot \mathrm{td}(T_{\tilde{X}}))_n = \deg(\mathrm{ch}(\rho^*\mathcal{O}_X) \cdot \mathrm{td}(\rho^*T_X))_n \\ &= \deg(\rho^*(\mathrm{ch}(\mathcal{O}_X) \cdot \mathrm{td}(T_X)))_n \\ &= \deg(\rho) \cdot \deg(\mathrm{ch}(\mathcal{O}_X) \cdot \mathrm{td}(T_X))_n \\ &= \deg(\rho) \cdot \chi(X, \mathcal{O}_X) = \deg(\rho), \end{aligned}$$

donc ρ est un isomorphisme, $\tilde{X} \simeq X$, la variété X est donc simplement connexe. ■

Remarques.

(1) Les deux ingrédients de la preuve ci-dessus sont le fait que $\pi_1(X)$ est fini et que $\chi(X, \mathcal{O}_X) = 1$. Dans le cas où X est Fano, la première assertion se démontre aussi en munissant X d'une métrique riemannienne à courbure de Ricci strictement positive[37] et il est bien connu que les variétés riemanniennes compactes à courbure de Ricci positive ont un π_1 fini. La deuxième assertion découle immédiatement du théorème d'annulation de Kodaira.

(2) En caractéristique zéro, la proposition 44 reste vraie et la démonstration du théorème 45 montre que tout revêtement étale fini de X est trivial : on dit que X est *algébriquement simplement connexe*. Kollár a montré qu'en caractéristique positive, une variété projective lisse séparablement rationnellement connexe est algébriquement simplement connexe (on renvoie au survol [Cha04] et sa bibliographie pour une discussion en toute caractéristique de la simple-connexité d'une variété séparablement rationnellement connexe ou unirationnelle).

6. Connexité rationnelle des variétés de Fano.

Les variétés de Fano sont les variétés projectives lisses X pour lesquelles le fibré anticanonique $-K_X = \det(T_X)$ est ample. Elles sont beaucoup étudiées car ce sont des briques élémentaires du programme de Mori (même s'il faut alors autoriser des singularités). De façon générale, il y a un espoir de classifier les variétés pour lesquelles le fibré tangent a tendance à être positif. Un énoncé particulièrement remarquable est la résolution par Mori d'une conjecture de Hartshorne [Mor79].

Théorème 46. (Mori) *Soit X une variété projective lisse de dimension n sur un corps de caractéristique quelconque. Alors T_X est ample si et seulement si $X \simeq \mathbb{P}^n$.*

L'hypothèse qu'une variété est de Fano est beaucoup plus faible : l'hypothèse d'amplitude porte sur le déterminant du fibré tangent. Du point de vue de la géométrie riemannienne, c'est la différence entre une hypothèse portant sur la courbure sectionnelle et une hypothèse portant sur la courbure de Ricci. Cependant, on a encore un théorème de finitude pour

[37] C'est possible et non trivial : ceci découle de la résolution de la conjecture de Calabi-Yau.

les variétés de Fano, aboutissement des travaux de Nadel, Campana, Kollár, Matsusaka, Miyaoka et Mori.

Théorème 47. *Sur un corps de caractéristique zéro, pour tout $n \geq 1$, il n'y a qu'un nombre fini de types de déformation de variétés lisses de Fano de dimension n.*

Il n'est pas question de démontrer ces deux résultats ici, mentionnons que leur preuve utilise de façon essentielle la géométrie des courbes rationnelles dans les variétés de Fano. Remarquons aussi que l'hypothèse X Fano n'est évidemment pas invariante par morphisme birationnel[38].

Exemple 4. *La seule courbe de Fano est la droite projective. En dimension deux, les surfaces de Fano sont aussi appelées surfaces de Del Pezzo, ce sont $\mathbb{P}^2$ éclaté en au plus 8 points en position générale et $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. En dimension trois, il y a 105 familles classifiées par Iskovskikh quand le nombre de Picard est égal à 1 et par Mori et Mukai quand le nombre de Picard est ≥ 2 (voir* [IP99] *et son impressionnante bibliographie).*

6.1. **Le quotient rationnel.** Si X est une variété projective, on peut définir une relation d'équivalence sur X de la façon suivante : deux points x et x' sont équivalents s'il existe une chaîne de courbes rationnelles passant par x et x'. Il n'y a aucun espoir que l'espace quotient pour cette relation d'équivalence puisse être muni d'une structure de variété algébrique (de sorte que l'application de passage au quotient soit un morphisme algébrique). Un énoncé remarquable dû à Campana et Kollár permet d'obtenir un “quotient rationnel”. Nous énonçons sans preuve ce résultat, cas particulier d'un énoncé beaucoup plus général où Campana, en caractéristique zéro, considère les relations d'équivalences engendrées par des familles couvrantes de sous-variétés (on autorise des chaînes de sous-variétés qui ne sont pas des courbes !).

Théorème 49. (Campana, Kollár) *Soit X une variété projective normale sur un corps (algébriquement clos) de caractéristique quelconque. Alors il existe une variété projective normale $R(X)$, unique à application birationnelle près, (appelée* quotient rationnel*) et une application rationnelle $\rho : X \dashrightarrow R(X)$ dominante telles que :*

(1) *il existe un ouvert non vide X^0 de X et un ouvert non vide $R(X)^0$ de $R(X)$ telle que ρ se restreigne en un morphisme propre et surjectif $\rho : X^0 \to R(X)^0$ (on dit que ρ est* presque holomorphe*),*

[38]Un peu de publicité pour mes travaux : le comportement par éclatement des variétés de Fano reste un sujet actuel d'étude initié dans [Wis91]. Lorsqu'on éclate des points, on a un théorème de classification dont une conséquence amusante est le théorème suivant [BCW02].

Théorème 48. (Bonavero, Campana et Wiśniewski) *Si X est une variété projective lisse complexe de dimension $n \geq 3$ et s'il existe deux points distincts a et b de X tels que l'éclatement de X de centre $\{a, b\}$ soit une variété de Fano, alors X est isomorphe à une quadrique lisse de $\mathbb{P}^{n+1}$.*

(2) *pour tout $y \in R(X)^0$, la fibre $\rho^{-1}(y)$ est rationnellement connexe par chaînes,*
(3) *toute application presque holomorphe $\varphi : X \dashrightarrow Y$ dont la fibre générale est rationnellement connexe par chaînes se factorise par ρ en $\psi : Y \dashrightarrow R(X)$,*
(4) *toute courbe rationnelle de X rencontrant une fibre très générale de ρ est contenue dans une fibre de ρ.*

Les trois derniers points signifient qu'une fibre très générale de ρ est une classe d'équivalence. De ce point de vue, l'énoncé est optimal : il y a des surfaces projectives non uniréglées contenant une infinité au plus dénombrable de courbes rationnelles (certaines surfaces $K3$ par exemple).

Evidemment, si X est une variété projective normale, alors X est rationnellement connexe par chaînes si et seulement si $R(X)$ est réduit à un point (par définition). De même, X est uniréglée si et seulement si $\dim R(X) < \dim X$.

Parmi les nombreuses conséquences du théorème de Graber, Harris et Starr, on obtient les deux résultats suivants, le premier était conjecturé par Kollár.

Théorème 50. *Soit X une variété projective lisse sur un corps de caractéristique quelconque. Alors le quotient rationnel $R(X)$ de X n'est pas uniréglé.*

Démonstration. C'est immédiat : si $R(X)$ est uniréglé, soit C une courbe rationnelle passant par un point général de $R(X)$. Alors, d'après le théorème 1, $\rho : \rho^{-1}(C) \to C$ possède une section, qui est donc une courbe rationnelle rencontrant une fibre générale de ρ non contenue dans une fibre de ρ, contradiction. ■

Corollaire 51. *Soit X une variété projective sur un corps de caractéristique zéro. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
(1) *pour toute application rationnelle $X \dashrightarrow Y$ dominante, Y est uniréglée ou réduite à un point,*
(2) *la variété X est rationnellement connexe.*

Démonstration. (1) implique (2) : soient $\pi : \tilde{X} \to X$ une résolution des singularités de X, $\rho : \tilde{X} \dashrightarrow R(\tilde{X})$ son quotient rationnel. Alors, l'application rationnelle $\rho\circ\pi^{-1} : X \dashrightarrow R(\tilde{X})$ est dominante, donc $R(\tilde{X})$ est réduit à un point, donc $\tilde{X}$ est rationnellement connexe par chaînes, donc rationnellement connexe par le théorème 38 et par suite X est rationnellement connexe.
(2) implique (1) est évident. ■

6.2. **Courbes rationnelles sur les variétés de Fano.** Ce paragraphe est une deuxième introduction à la théorie de Mori, je ne donne aucune preuve. On a déjà vu que si K_X n'est pas nef, la variété X possède des courbes rationnelles. Le théorème suivant précise cette idée.

Théorème 52. (Miyaoka et Mukai) *Soit X une variété projective sur un corps de caractéristique quelconque. Soit C une courbe de X. On suppose que X est lisse le long de C et que $K_X \cdot C < 0$. Soit H un diviseur ample sur X. Alors par tout point x de C passe une courbe rationnelle Γ telle que*

$$0 < H \cdot \Gamma \leq 2 \dim X \frac{H \cdot C}{-K_X \cdot C}.$$

Remarques.

(i) Si X est lisse, on peut à l'aide du lemme de cassage obtenir une courbe rationnelle Γ satisfaisant de plus $-K_X \cdot \Gamma \leq \dim X + 1$. Il s'agit du premier pas (mais le pas essentiel) pour démontrer le théorème du cône dans le cas lisse.

(ii) Si X est normale $\mathbb{Q}$-Fano[39], on en déduit que X est couverte par des courbes rationnelles Γ vérifiant $-K_X \cdot \Gamma \leq 2 \dim X$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de composantes de $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X)$ de degré d donné, on en déduit que *toute variété normale projective $\mathbb{Q}$-Fano est uniréglée.*

Ce théorème est, on l'a déjà mentionné, plus facile en caractéristique positive : on montre qu'un grand multiple de C obtenu à l'aide du morphisme de Frobenius se déforme en passant par x et dégénère en une chaîne de courbes rationnelles. En caractéristique zéro, on utilise le résultat connu en caractéristique positive avec un contrôle uniforme du degré des courbes rationnelles produites. Cette idée géniale, parmi d'autres, a valu à Mori la médaille Fields et on peut mentionner qu'on ne connaît pas de preuve alternative par des méthodes transcendantes, ingrédient nécessaire à une éventuelle extension du programme de Mori aux variétés kählériennes compactes.

Campana d'une part et Kollár, Miyaoka et Mori d'autre part ont étendu le résultat de Miyaoka et Mori de la façon suivante.

Théorème 53. *Soit X une variété projective normale $\mathbb{Q}$-Fano sur un corps de caractéristique quelconque et $\rho : X \dashrightarrow Y$ une application presque holomorphe dominante. Soit F une fibre générale de ρ. Si Y n'est pas réduit à un point, alors il existe une courbe rationnelle rencontrant F et non contenue dans F.*

6.3. **Connexité rationnelle des variétés de Fano.** Il suffit d'assembler les résultats précédents pour obtenir le résultat général suivant.

Théorème 54. *Soit X une variété projective normale $\mathbb{Q}$-Fano sur un corps de caractéristique quelconque. Alors X est rationnellement connexe par chaînes.*

Le corollaire 39 implique alors le résultat annoncé.

[39] On entend par là que X est singulière et qu'un multiple entier de $-K_X$ est un diviseur de Cartier ample.

Corollaire 55. *Soit X une variété projective lisse et de Fano sur un corps de caractéristique zéro. Alors X est rationnellement connexe.*

En étant plus soigneux, il est possible à nouveau de borner le degré (et le nombre de maillons) d'une chaîne de courbes rationnelles permettant de joindre deux points généraux, et même quelconques, de X. Ce type de bornes dans le cas lisse permet aussi de montrer le théorème 47.

COURS 5 (cette partie a été écrite avec Stéphane DRUEL).

Dans ce dernier cours, nous présentons la preuve de la conjecture de connexité rationnelle de Shokurov suivant Hacon et M^c^Kernan. Outre ses liens évidents avec les cours précédents, cette partie se veut être, modestement, une invitation à la géométrie birationnelle moderne, celle des paires et du MMP. La littérature sur le sujet a explosé ces 20 dernières années, on recommande particulièrement les textes “historiques” [KMM87] et [CKM88], les ouvrages récents [Cor07], [Kol97], [KM98], [Laz04] et [Mat01] ainsi que le récent texte de synthèse [Dru08].

7. La conjecture de connexité rationnelle de Shokurov.

Dans toute cette partie, **le corps de base K est algébriquement clos de caractéristique zéro**. On présente, suivant Hacon et McKernan, une vaste généralisation de certains des énoncés précédemment rencontrés (on pense au lemme d'Abhyankar et au théorème 54), le théorème de Graber, Harris et Starr y jouant un rôle essentiel.

7.1. Les résultats.

Définition 56. *Une* paire (X, Δ) *est la donnée :*

(i) *d'une variété algébrique normale X,*
(ii) *d'un $\mathbb{Q}$-diviseur de Weil $\Delta = \sum_{i=1}^{N} d_i \Delta_i$, où les Δ_i sont des diviseurs de Weil irréductibles et réduits et les d_i des nombres rationnels ≥ 0,*

tels que $K_X + \Delta$ est $\mathbb{Q}$-Cartier.

Définition 57. *Soit (X, Δ) une paire. Une* log-résolution de (X, Δ) *est un morphisme birationnel propre $\pi : Y \to X$ telle que Y est lisse et* $\mathrm{Exc}(\pi) + \Delta'$ *est un diviseur à croisements normaux simples (Δ' est la transformée stricte de Δ).*
Pour un tel π, on écrit alors

$$K_Y + \Delta' = \pi^*(K_X + \Delta) + \sum_E a_\pi(E, \Delta)E$$

où les $a_\pi(E, \Delta) \in \mathbb{Q}$ et où la somme porte sur les diviseurs exceptionnels et irréductibles E de π.

Tout diviseur exceptionnel et irréductible E de π définit une valuation divisorielle ν_E de $K(X)$, de centre $\pi(E) \subset X$. On montre que $a_\pi(E, \Delta)$ ne dépend que de ν_E et on note alors $a(E, \Delta) = a_\pi(E, \Delta)$. On étend $a(-, \Delta)$ à tout diviseur irréductible non exceptionnel E en prenant l'opposé de la multiplicité de E dans Δ.

Définition 58. *On dit que la paire (X, Δ) est Kawamata log terminale (klt en abrégé) si*

$$a(E, \Delta) > -1$$

pour toute valuation divisorielle ν_E[40]. *Si* (X, Δ) *est une paire et si* π *est une log-résolution de* (X, Δ), *on note*

$$\mathrm{Nklt}(X, \Delta) = \cup_{\{E | a(E,\Delta) \leq -1\}} \pi(E)$$

où la réunion porte sur tous les diviseurs irréductibles. Le lieu $\mathrm{Nklt}(X, \Delta)$ *ne dépend pas de* π, *il est fermé et la paire* (X, Δ) *est klt sur l'ouvert* $X \setminus \mathrm{Nklt}(X, \Delta)$.

Définition 59. *On dit que la paire* (X, Δ) *est log canonique (lc en abrégé) si*

$$a(E, \Delta) \geq -1$$

pour toute valuation divisorielle ν_E[41].

Le cadre des paires est maintenant le cadre naturel dans lequel prend place le programme de Mori (on sait même maintenant qu'il s'avère nécessaire de travailler avec des $\mathbb{R}$-diviseurs). Dire qu'une paire (X, Δ) est klt signifie que X et Δ sont peu singulières. Ces singularités sont inévitables lorsqu'on applique le programme de Mori. Il est immédiat (voir la preuve du lemme 64 ci-dessous) et important de constater qu'une petite perturbation d'une paire klt est encore une paire klt : si D est un $\mathbb{Q}$-diviseur de Cartier effectif et si (X, Δ) est klt, alors $(X, \Delta + \varepsilon D)$ est klt pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit.

Exemple 5.
(1) *Les paires klt sont lc.*
(2) *Soient* S *une surface lisse et* $C \subset S$ *une courbe lisse de genre* g *telle que* $C^2 = -n < 0$. *Soit* $\pi : S \to S_0$ *le morphisme birationnel consistant à contracter* C *sur un point. Alors* π *est une résolution de la paire* $(S_0, 0)$ *et*

$$K_S = \pi^* K_{S_0} + \left(-1 + \frac{2 - 2g}{n}\right) C.$$

La paire $(S_0, 0)$ *est donc klt si et seulement si* $g = 0$, *est lc si et seulement si* $g \leq 1$.
(3) *Si* X *est lisse et* $\Delta = \sum_{i=1}^{N} d_i \Delta_i$ *est un diviseur à croisements normaux simples, alors*

$$\mathrm{Nklt}(X, \Delta) = \cup_{\{i | d_i \geq 1\}} \Delta_i$$

et (X, Δ) *est klt si et seulement si* $d_i < 1$ *pour tout* i, *est lc si et seulement si* $d_i \leq 1$ *pour tout* i.

Les résultats suivants sont dus à Hacon et M$^{\mathrm{c}}$Kernan (on renvoie à l'article original [HM07] pour des énoncés un peu plus généraux).

[40] Il suffit de le vérifier sur une log-résolution.
[41] Il suffit de le vérifier sur une log-résolution.

Théorème 60. (Hacon et M^c^Kernan) *Soient* (X,Δ) *une paire klt et* $f\ :X\to S$ *un morphisme propre tels que* $-K_X$ *est* f*-gros et* $-(K_X+\Delta)$ *est* f*-nef*[42]*. Soient* Y *une variété algébrique normale,* $g\ :Y\to X$ *un morphisme propre birationnel et* $\pi=f\circ g:Y\to S$*. Alors toute composante connexe de toute fibre de* π *est rationnellement connexe par chaînes.*

Mise en garde. Dans cet énoncé, les composantes connexes des fibres de π ne sont en général pas irréductibles. Dire qu'une composante connexe W d'une fibre de π est rationnellement connexe par chaînes implique que deux points quelconques de W peuvent être joints par une chaîne de courbes rationnelles contenues dans W. Ceci n'implique pas que chaque composante irréductible de W est elle-même rationnellement connexe par chaînes. Soient X une variété lisse de dimension 3, $B_x(X)$ l'éclaté de X en x et Y l'éclaté de $B_x(X)$ le long d'une courbe elliptique contenue dans le diviseur exceptionnel de $B_x(X)\to X$. Soit $\pi:Y\to X$ la composée. Alors $\pi^{-1}(x)$ est connexe, a deux composantes irréductibles, est rationnellement connexe par chaînes mais la composante correspondant au diviseur exceptionnel du deuxième éclatement n'est pas rationnellement connexe par chaînes : c'est un fibré en $\mathbb{P}^1$ sur une courbe elliptique.

Les deux énoncés suivants étaient conjecturés par Shokurov. Il s'agit du théorème 60 dans les cas extrêmes où S est un point et $S=X$.
Dans le cas où S est réduit à un point, on obtient une généralisation du théorème 54 due à Zhang.

Corollaire 61. (Hacon et M^c^Kernan, Zhang) *Soit* (X,Δ) *une paire klt, avec* X *projective, telle que* $-(K_X+\Delta)$ *est gros et nef. Alors* X *est rationnellement connexe.*

Dans le cas où $S=X$, on obtient encore le corollaire suivant, généralisation des propositions 11 et 15 et du corollaire 12 ; le point (1) est la conjecture de connexité rationnelle de Shokurov.

Corollaire 62. (Hacon et M^c^Kernan) *Soit* (X,Δ) *une paire klt.*

(1) *Soient* Y *une variété algébrique normale et* $\pi\ :Y\to X$ *un morphisme birationnel propre. Alors toute fibre*[43] *de* π *est rationnellement connexe par chaînes.*
(2) *Soient* Z *une variété algébrique normale et* $\varphi:X\dashrightarrow Z$ *une application rationnelle propre. Si* Z *ne contient pas de courbes rationnelles, alors* φ *se prolonge en une application régulière* $\varphi:X\to Z$*.*

Une dernière conséquence est la connexité rationnelle par chaînes des fibres des contractions de Mori fournies par le théorème du cône.

[42] Un $\mathbb{Q}$-diviseur est dit f-gros s'il est $\mathbb{Q}$-linéairement équivalent à $A+B$ où A est f-ample et B est un $\mathbb{Q}$-diviseur de Weil effectif. Un diviseur $\mathbb{Q}$-Cartier est f-nef s'il est nef en restriction à **toute** fibre de f.

[43] Inutile ici de se restreindre aux composantes connexes, le théorème principal de Zariski affirme que si $\pi:Y\to X$ est propre birationnel avec X normale, alors les fibres de π sont connexes.

Corollaire 63. *Soient X une variété projective à singularités terminales et $f : X \to Z$ un morphisme sur une variété projective Z. Soient $R_i := \mathbb{R}^+[\Gamma_i]$ une arête du cône $\overline{\mathrm{NE}}(X/Z)$ telle que $-K_X \cdot \Gamma_i > 0$ et $c_i : X/Z \to X_i/Z$ la contraction associée. Alors toute fibre de c_i est rationnellement connexe par chaînes.*

Mentionnons aussi que Broustet et Pacienza ont étendu depuis les résultats de Hacon et M$^{\mathrm{c}}$Kernan au cas où $-(K_X + \Delta)$ n'est plus supposé f-nef [BP09].

7.2. **Les grandes lignes de la preuve du théorème 60.** *On donne dans ce paragraphe les grandes étapes, tous les détails sont donnés dans la suite de ce cours.*
Soient (X, Δ) une paire klt et $f : X \to S$ un morphisme propre tels que $-K_X$ est f-gros et $-(K_X + \Delta)$ est f-nef. Soient Y une variété algébrique normale, $g : Y \to X$ un morphisme propre birationnel et $\pi = f \circ g : Y \to S$. Supposons pour simplifier que $K_X + \Delta$ est linéairement équivalent à 0 et que $\Delta = A + B$ avec A ample aussi général que souhaité, B effectif et (X, B) klt.

7.2.1. *Le cas où S est réduit à un point.* Il s'agit alors de montrer que Y est rationnellement connexe par chaînes. Supposons à nouveau pour simplifier que Y est lisse et qu'il y a un morphisme régulier $t : Y \to R(Y)$ de Y sur son quotient rationnel $R(Y)$. Comme $R(Y)$ n'est pas uniréglé (théorème 50), le théorème 19 affirme que $K_{R(Y)}$ est pseudo-effectif, et par suite que
$$\kappa(R(Y), K_{R(Y)} + H) = \dim R(Y)$$
pour tout $\mathbb{Q}$-diviseur ample H sur $R(Y)$.
On peut alors écrire[44]
$$K_Y + \Omega = g^*(K_X + \Delta) + D$$
où Ω et D sont effectifs sans composante commune, la paire (Y, Ω) est klt et D est g-exceptionnel. On peut aussi supposer que $\Omega = g^*A + \bar{B}$ avec $(Y, \bar{B})$ klt. Comme D est g-exceptionnel,
$$\kappa(Y, K_Y + \Omega) = \kappa(X, K_X + \Delta) = 0.$$
En utilisant la positivité de Ω, on montre alors, c'est l'étape clé, qu'il existe un $\mathbb{Q}$-diviseur ample H sur $R(Y)$ tel que
$$0 = \kappa(Y, K_Y + \Omega) \geq \kappa(R(Y), K_{R(Y)} + H) = \dim R(Y)$$
(et ainsi $R(Y)$ est réduit à un point, *i.e.* Y est rationnellement connexe par chaînes). Cette inégalité (de type conjecture $C_{n,m}$) est obtenue à l'aide d'un théorème de positivité d'images directes (dû à Campana) pour les faisceaux du type $t_*\mathcal{O}_Y(m(K_{Y/R(Y)} + C))$, où C est un diviseur effectif dont la restriction à la fibre générale de t est lc.

[44]Les participants de l'Ecole d'Eté 2007 de l'Institut Fourier à Grenoble reconnaitront la décomposition "dagger" dont Alessio Corti est fan.

7.2.2. *Le cas où* $\dim S > 0$. Fixons $s \in S$ et supposons que S est affine. Supposons aussi pour simplifier que Y est lisse et que $F := \pi^{-1}(s)$ est un diviseur à croisements normaux simples.
On montre alors que si k est le nombre de composantes irréductibles de $F = \pi^{-1}(s)$, il existe une numérotation des composantes irréductibles $F_1, \ldots, F_k$ de F et pour tout i une paire (Y, Θ_i) tels que

(1) $\Theta_i = \bar{A}_0 + B_i$ où $\bar{A}_0$ est un $\mathbb{Q}$-diviseur ample et effectif et B_i est un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif,
(2) $K_Y + \Theta_i \sim \bar{E}_i$ où $\bar{E}_i$ est effectif, g-exceptionnel et n'a pas de composante commune avec Θ_i,
(3) $\mathrm{Nklt}(Y, \Theta_i) = F_1 \cup \cdots \cup F_i$ et le coefficient de F_i dans Θ_i vaut 1, celui des $F_1, \ldots, F_{i-1}$ est > 1. En particulier, $\Theta_1 = \bar{A}_0 + F_1 + C_1$ où (Y, C_1) est klt et C_1 ne contient pas F_1 dans son support.

On montre ensuite que

(1) La composante F_1 est rationnellement connexe,
(2) pour tout $i \geq 2$, F_i est rationnellement connexe par chaînes modulo

$$F_i \cap \mathrm{Nklt}(Y, \Theta_{i-1}) = F_i \cap (F_1 \cup \ldots \cup F_{i-1}),$$

ce qui signifie que pour tout $x \in F_i$, il existe une chaîne de courbes rationnelles joignant x à un point de $F_i \cap (F_1 \cup \ldots \cup F_{i-1})$.

Pour montrer que F_1 est rationnellement connexe, on considère comme précédemment son quotient rationnel $t : F_1 \to R(F_1)$ (que l'on suppose régulier pour simplifier) puis l'on montre qu'il existe un $\mathbb{Q}$-diviseur ample H sur $R(F_1)$ tel que

$$\kappa(F_1, K_{F_1} + \{\Theta_1\}_{|F_1}) \geq \kappa(R(F_1), K_{R(F_1)} + H)$$

à l'aide à nouveau du théorème de positivité d'images directes de Campana.
Pour conclure, il suffit de montrer que $\kappa(F_1, K_{F_1} + \{\Theta_1\}_{|F_1}) = 0$. Or $K_{F_1} + \{\Theta_1\}_{|F_1} = (K_Y + \Theta_1)_{|F_1}$ si bien qu'il s'agit alors d'appliquer un théorème d'extension de sections fourni lui-aussi par Hacon et M^c^Kernan.

7.3. **Un peu de technologie des paires.** L'avantage de travailler avec des paires réside dans leur grande souplesse, on peut les perturber et "suivre leur positivité" dans les log-résolutions successives. On donne ici un lemme qui illustre bien ce principe.

Lemme 64. *Soient* (X, Δ) *une paire klt. On suppose que* Δ *est gros. Alors il existe un* $\mathbb{Q}$*-diviseur ample effectif* A *et un* $\mathbb{Q}$*-diviseur effectif* Γ_1 *tels que les paires* $(X, \Gamma_1 + A)$ *et* (X, Γ_1) *sont klt et* $\Delta \sim \Gamma_1 + A$[45].

Ce lemme permet donc de remplacer la paire klt (X, Δ) par une paire (X, Γ) elle aussi klt, avec $\Gamma \sim \Delta$ et $\Gamma = \text{ample} + \text{effectif}$. L'hypothèse que Δ est gros est évidemment essentielle ici.

Démonstration. Comme Δ est gros, il existe des $\mathbb{Q}$-diviseurs H et B tels que H est ample, B est effectif et $\Delta \sim H + B$. Soit $H_m \in |mH|$ un élément général et $A_m := (1/m)H_m$, où m est choisi suffisamment grand et suffisamment divisible pour que mH soit un diviseur (entier) très ample sur X. On pose alors

$$\Gamma := (1-\varepsilon)\Delta + \varepsilon A_m + \varepsilon B = \Gamma_1 + A \sim \Delta$$

où $A := \varepsilon A_m$ et $\Gamma_1 := (1-\varepsilon)\Delta + \varepsilon B$. Par construction, $K_X + A_m + B \sim K_X + \Delta$ est $\mathbb{Q}$-Cartier, donc $K_X + \Gamma \sim (1-\varepsilon)(K_X + \Delta) + \varepsilon(K_X + A_m + B)$ l'est aussi, de même que $K_X + \Gamma_1$.
Soit $\pi \ : Y \to X$ une log-résolution Δ telle que $\mathrm{Exc}(\pi) + \Delta' + B'$ soit un diviseur à croisements normaux simples. Si H_m est suffisamment général, la transformée stricte de H_m est égale à sa transformée totale $\pi^* H_m$.
Le lemme découle alors des calculs suivants, la somme porte à chaque fois sur les diviseurs π-exceptionnels et les $'$ désignent les transformées strictes.

$$\begin{aligned}
K_Y + A'_m + B' &= \pi^*(K_X + A_m + B) + \sum_E r_E E \\
K_Y + \Delta' &= \pi^*(K_X + \Delta) + \sum_E a(E, \Delta) E \\
K_Y + \Gamma'_1 &= \pi^*(K_X + \Gamma_1) + \sum_E ((1-\varepsilon)a(E,\Delta) + \varepsilon r_E) E \\
K_Y + \Gamma' &= \pi^*(K_X + \Gamma) + \sum_E ((1-\varepsilon)a(E,\Delta) + \varepsilon r_E) E.
\end{aligned}$$

Comme $a(E, \Delta) > -1$ pour tout E, les quantités $(1-\varepsilon)a(E,\Delta) + \varepsilon r_E$ sont aussi > -1 pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. De même, les multiplicités de Γ et Γ_1 le long de leurs composantes irréductibles sont < 1 si $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit. ∎

7.4. **Le théorème de positivité d'images directes de Campana.** L'un des ingrédients essentiels, non encore introduit dans ce cours, de la preuve du théorème de Hacon et

[45] Dans tout ce texte, $\sim$ est l'équivalence linéaire des $\mathbb{Q}$-diviseurs : deux $\mathbb{Q}$-diviseurs M et N sont linéairement équivalents s'il existe un entier positif m tels que mM et mN sont deux diviseurs entiers linéairement équivalents.

M$^{\mathrm{c}}$Kernan est un théorème de positivité d'images directes. Pour l'énoncer, nous avons besoin d'une définition due à Viehweg.

Définition 65. *Un faisceau cohérent sans torsion $\mathcal{E}$ sur une variété projective V est faiblement positif si, V_0 désignant le plus grand ouvert sur lequel $\mathcal{E}$ est localement libre, il existe un ouvert non vide $U \subset V_0$ tel que pour tout diviseur ample H sur V, pour tout entier $a > 0$, il existe $b > 0$ tel que les sections globales de $\mathcal{F}^{ab} := (\mathrm{Sym}^{ab}\mathcal{E}_{|V_0}) \otimes H_{|V_0}^{\otimes b}$ engendrent $\mathcal{F}^{ab}_{|U}$.*

Remarque. On met en garde le lecteur avec le fait que le faisceau nul est faiblement positif !!

Le théorème de positivité d'images directes dû à Campana [Cam04b], et faisant suite aux travaux de Viehweg, s'énonce de la façon suivante.

Théorème 66. (Campana) *Soit $f : V' \to V$ un morphisme à fibres connexes entre variétés projectives lisses et soit C un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif. On suppose que la restriction de C à une fibre générale de f est lc. Alors le faisceau $f_*\mathcal{O}_{V'}(m(K_{V'/V} + C))$ est faiblement positif pour tout entier m tel que $m(K_{V'/V} + C)$ est entier.*

On l'a dit, le faisceau nul est faiblement positif. Sous des hypothèses de positivité de la fibre, on garantit que le faisceau images directes est non trivial.

Théorème 67. *Soit $f : V' \to V$ un morphisme à fibres connexes entre variétés projectives lisses, soit C un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif et soit W la fibre générale de f.*
On suppose que la paire $(W, C_{|W})$ est lc et que

$$\kappa(W, m_0(K_{V'/V} + C)_{|W}) \geq 0$$

pour un entier m_0 tel que $m_0(K_{V'/V} + C)$ est entier.
Alors, pour tout diviseur ample H sur V, il y a un entier $b > 0$ tel que

$$H^0(V', bm_0(K_{V'/V} + C + f^*H)) \neq 0.$$

Démonstration. Répétons, pour le confort du lecteur, cet argument dû à Campana et Viehweg et détaillé dans [Deb08].
Le lemme d'aplatissement de Raynaud combiné au théorème de désingularisation d'Hironaka permet de construire un diagramme

$$\begin{tikzcd} V_1' \arrow[r, "\tau'"] \arrow[d, "f_1"'] & V' \arrow[d, "f"] \\ V_1 \arrow[r, "\tau"] & V \end{tikzcd}$$

où V_1' et V_1 sont des variétés projectives lisses, τ' et τ sont des modifications telles que d'une part $f_1(\mathrm{Exc}(\tau')) \subset \mathrm{Exc}(\tau)$ et d'autre part *toute hypersurface $S \subset V_1'$ dont l'image par f_1 est de codimension ≥ 2 dans V est τ'-exceptionnelle.*

Comme $(\tau')^*C$ est lc, le théorème 66 assure que

$$(f_1)_*\mathcal{O}_{V_1'}(m(K_{V_1'/V_1} + (\tau')^*C + f_1^*K_{V_1/V}))$$

est faiblement positif pour tout m suffisamment divisible. Ce même faisceau est aussi non nul car

$$\tau_*(f_1)_*\mathcal{O}_{V_1'}(m_0(K_{V_1'/V_1} + (\tau')^*C + f_1^*K_{V_1/V})) = f_*\mathcal{O}_{V'}(m_0(K_{V'/V} + C)) \neq 0$$

puisque la fibre du faisceau $f_*\mathcal{O}_{V'}(m_0(K_{V'/V} + C))$ en un point général de V vaut

$$H^0(W, (m_0(K_{V'/V} + C))_{|W}),$$

supposé non nul.
Comme H est ample, $\tau^*(m_0H)$ est linéairement équivalent à $H_{V_1} + E_{V_1}$ avec H_{V_1} ample sur V_1 et E_{V_1} effectif. Par définition de la faible positivité du faisceau non nul $f_*\mathcal{O}_{V'}(m_0(K_{V'/V} + C))$, il existe un entier b et un ouvert V_0 de V_1, dont le complémentaire dans V_1 est de codimension ≥ 2, tels que

$$H^0(V_0, (f_1)_*\mathcal{O}_{V_1'}(bm_0(K_{V_1'/V_1} + (\tau')^*C + f_1^*K_{V_1/V})) \otimes H_{V_1}^{\otimes b}) \neq 0.$$

A fortiori, puisque $\tau^*(m_0H) \sim H_{V_1} + E_{V_1}$,

$$H^0(f_1^{-1}(V_0), bm_0(K_{V_1'/V_1} + (\tau')^*C + f_1^*K_{V_1/V} + f_1^*\tau^*H)) =$$
$$H^0(V_0, (f_1)_*\mathcal{O}_{V_1'}(bm_0(K_{V_1'/V_1} + (\tau')^*C + f_1^*K_{V_1/V})) \otimes \tau^*H^{\otimes b}) \neq 0.$$

Or,

$$K_{V_1'/V_1} + (\tau')^*C + f_1^*K_{V_1/V} + f_1^*\tau^*H = K_{V_1'/V'} + (\tau')^*(K_{V'/V} + C + f^*H).$$

Comme $K_{V_1'/V'}$ est τ'-exceptionnel, de même que le complémentaire dans V_1' de $f_1^{-1}(V_0)$, on en déduit que

$$0 \neq H^0(f_1^{-1}(V_0), bm_0(K_{V_1'/V_1} + (\tau')^*C + f_1^*K_{V_1/V} + f_1^*\tau^*H)) = H^0(V', bm_0(K_{V'/V} + C + f^*H)).$$

■

On en déduit, suivant la terminologie introduite par Campana, une version "orbifold" de la conjecture $C_{n,m}$.

Corollaire 68. *Soit $f : V' \to V$ un morphisme à fibres connexes entre variétés projectives lisses, soit C un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif et soit W la fibre générale de f. On suppose que la paire $(W, C_{|W})$ est lc et que*

$$\kappa(W, (K_{V'/V} + C)_{|W}) \geq 0.$$

Alors, pour tout diviseur ample H sur V,

$$\kappa(V', K_{V'} + C + 2f^*H) \geq \kappa(V, K_V + H).$$

Démonstration. Comme il existe un entier $b > 0$ tel que

$$H^0(V', b(K_{V'/V} + C + f^*H)) \neq 0,$$

on en déduit que pour tout m suffisamment divisible, $H^0(V, mb(K_V + H))$ s'injecte dans

$$H^0(V', mb(K_{V'/V} + C + f^*H + f^*(K_V + H))) \simeq H^0(V', mb(K_{V'} + C + 2f^*H)).$$

A fortiori,

$$\dim H^0(V, mb(K_V + H)) \leq \dim H^0(V', mb(K_{V'} + C + 2f^*H)).$$

■

7.5. **Le résultat de Zhang.** On traite ici le cas où $\dim S = 0$. Rappelons l'énoncé.

Corollaire 61. (Zhang) *Soit (X, Δ) une paire klt, avec X projective, telle que $-(K_X+\Delta)$ est gros et nef. Alors X est rationnellement connexe.*

Démonstration.
Soit $g\ : Y \to X$ une log-résolution de la paire (X, Δ) fixée dans toute la suite. On va montrer que Y est rationnellement connexe. Comme Y est lisse, il suffit de montrer que Y est rationnellement connexe par chaînes (corollaire 39), autrement dit que son quotient rationnel $R(Y)$ est réduit à un point.

Comme $-(K_X+\Delta)$ est gros et nef, le "base-point-free theorem"[46] affirme que $-m(K_X+\Delta)$ est sans point base pour m assez grand et assez divisible. Soit alors $D \in |-m(K_X + \Delta)|$ un élément général pour m suffisamment grand et divisible. La paire $(X, \Delta + (1/m)D)$ est toujours klt et si $\Delta_1 := \Delta+(1/m)D$, alors Δ_1 est gros et $K_X+\Delta_1 \sim 0$. Comme Δ_1 est gros, le lemme 64 montre qu'il existe $\Delta_2 = \varepsilon A_1 + B_1$, A_1 ample et B_1 effectif, A_1 suffisamment général pour que sa transformée totale sous g soit égale à sa transformée stricte sous g, tels que (X, B_1) est klt, (X, Δ_2) est klt et $K_X + \Delta_2 \sim 0$.

Dorénavant, on peut donc supposer que (X, Δ) est une paire klt, que $K_X + \Delta$ est linéairement équivalent à 0 et que $\Delta = A+B$ avec A ample aussi général que souhaité, B effectif et (X, B) klt.

---

[46]En voici l'énoncé, dans le cadre relatif utile pour la suite du cours. On l'applique ici dans le cas où Z est réduit à un point.

Théorème 69. ("Base-point-free theorem") *Soient (X, Γ) une paire klt, $\pi : X \to Z$ un morphisme projectif et D un diviseur de Cartier π-nef sur X. On suppose qu'il existe un rationnel $a > 0$ tel que $aD - (K_X + \Gamma)$ est π-nef et π-gros. Alors le système linéaire mD est π-globalement engendré pour tout m suffisamment divisible.*

Dans l'énoncé de ce théorème, "mD est π-globalement engendré" signifie qu'il existe un recouvrement de Z par des ouverts affines tel que mD est sans point base en restriction à $\pi^{-1}(U)$ pour tout ouvert U du recouvrement.

Etape 2. Soient $t : Y \dashrightarrow R(Y)$ le quotient rationnel de Y, $\varphi : \tilde{Y} \to Y$ une suite d'éclatements de centres lisses qui lève les indéterminations de t et $\tilde{t} = t \circ \varphi : \tilde{Y} \to R(Y)$ le morphisme associé.
On écrit à nouveau la décomposition

$$K_{\tilde{Y}} + \Omega = (g \circ \varphi)^*(K_X + \Delta) + D$$

où Ω et D sont effectifs sans composante commune, la paire $(\tilde{Y}, \Omega)$ est klt, $(g \circ \varphi)_*(\Omega) = \Delta$ et D est $(g \circ \varphi)$-exceptionnel. Enfin, $\Omega = (g \circ \varphi)^* A + \bar{B}$ avec $(\tilde{Y}, \bar{B})$ klt. Comme D est $(g \circ \varphi)$-exceptionnel,

$$\kappa(\tilde{Y}, K_{\tilde{Y}} + \Omega) = \kappa(X, K_X + \Delta) = 0.$$

Etape 3. Démontrons le lemme suivant.

Lemme 70. *Il existe un $\mathbb{Q}$-diviseur H ample sur $R(Y)$ tel que $(g \circ \varphi)^* A \sim 2\tilde{t}^* H + \Gamma$ où Γ est effectif et la paire $(\tilde{Y}, \bar{B} + \Gamma)$ est klt.*

En effet, il existe un diviseur effectif E^* tel que $(g \circ \varphi)^* A - \varepsilon E^*$ est ample sur $\tilde{Y}$ pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Si H_1 est très ample sur $R(Y)$, soit A_m un membre général de $|m((g \circ \varphi)^* A - \varepsilon E^*) - \tilde{t}^* H_1|$. On a alors

$$(g \circ \varphi)^* A \sim \frac{1}{m} A_m + \varepsilon E^* + \frac{1}{m} \tilde{t}^* H_1.$$

Si m est suffisamment grand et ε suffisamment petit, la paire $(\tilde{Y}, (1/m)A_m + \varepsilon E^* + \bar{B})$ est klt puisque $(\tilde{Y}, \bar{B})$ l'est et $H = (1/2m)H_1$ convient. Ceci termine ce lemme. ∎

Etape 4. La paire $\bar{B} + \Gamma$ est klt, donc sa restriction à la fibre générale $\tilde{t}^{-1}(u)$ l'est aussi. De plus,

$$K_{\tilde{Y}/R(Y)} + \bar{B} + \Gamma \sim K_{\tilde{Y}} - \tilde{t}^* K_{R(Y)} + \Omega - (g \circ \varphi)^* A + (g \circ \varphi)^* A - 2\tilde{t}^* H$$

donc

$$(K_{\tilde{Y}/R(Y)} + \bar{B} + \Gamma)_{|\tilde{t}^{-1}(u)} \sim (K_{\tilde{Y}} + \Omega)_{|\tilde{t}^{-1}(u)} \sim D_{|\tilde{t}^{-1}(u)}$$

est effectif donc

$$H^0(\tilde{t}^{-1}(u), m(K_{\tilde{Y}/R(Y)} + \bar{B} + \Gamma)_{|\tilde{t}^{-1}(u)}) \neq 0.$$

Comme $(g \circ \varphi)^* A \sim 2\tilde{t}^* H + \Gamma$ et $\Omega = (g \circ \varphi)^* A + \bar{B}$, on en déduit par le Corollaire 68 que

$$\begin{aligned} 0 = \kappa(\tilde{Y}, K_{\tilde{Y}} + \Omega) &= \kappa(\tilde{Y}, K_{\tilde{Y}} + \bar{B} + \Gamma + 2\tilde{t}^* H) \\ &\geq \kappa(R(Y), K_{R(Y)} + H). \end{aligned}$$

Or $R(Y)$ n'est pas uniréglé (théorème 50), le théorème 19 affirme donc que $K_{R(Y)}$ est pseudo-effectif, et par suite que

$$\kappa(R(Y), K_{R(Y)} + H) = \dim R(Y).$$

Contradiction sauf si $R(Y)$ est un point ! ∎

7.6. **Le théorème de Hacon et M^{c}Kernan.** On traite ici le cas où $\dim S > 0$. Rappelons l'énoncé.

Théorème 60. (Hacon et M^{c}Kernan) *Soient (X, Δ) une paire klt et $f\ : X \to S$ un morphisme propre tels que $-K_X$ est f-gros et $-(K_X + \Delta)$ est f-nef. Soient Y une variété algébrique normale, $g\ : Y \to X$ un morphisme propre birationnel et $\pi = f \circ g : Y \to S$. Alors toute composante connexe de toute fibre de π est rationnellement connexe par chaînes.*

7.6.1. *Quelques réductions "faciles".* Comme l'énoncé est local, on peut supposer que S est affine, et à l'aide du "base-point-free theorem" dans sa version relative, on montre, exactement comme dans la preuve du théorème de Zhang[47], qu'il existe $\Delta_2 = \varepsilon A_1 + B_1$, A_1 ample et B_1 effectif, A_1 suffisamment général pour que sa transformée totale sous g soit égale à sa transformée stricte sous g, tels que (X, B_1) est klt, (X, Δ_2) est klt et $K_X + \Delta_2 \sim 0$.

Dorénavant, on suppose donc que (X, Δ) est une paire klt, que $f\ : X \to S$ est un morphisme tel que $K_X + \Delta$ est linéairement équivalent à 0 et que $\Delta = A + B$ avec A ample aussi général que souhaité, B effectif et (X, B) klt. On supposera aussi, quitte à faire une factorisation de Stein, que f est à fibres connexes et que S est affine normale.

7.6.2. *On réalise la fibre comme lieu non klt d'une paire bien choisie.* Fixons $s \in S$. Quitte à éclater encore Y, on peut supposer que g est une log-résolution de (X, Δ) telle que

$$\pi^{-1}(s) + \mathrm{Exc}(g) + \Delta'$$

est un diviseur à croisements normaux simples[48] : si $\sigma : Y' \to Y$ est une suite d'éclatements (donc à fibres connexes) et si toute composante connexe de $(\pi \circ \sigma)^{-1}(s)$ est rationnellement connexe par chaînes, alors toute composante connexe de $\pi^{-1}(s)$ est aussi rationnellement connexe par chaînes.

Soit $F := \pi^{-1}(s)$ dont on rappelle qu'on vient de supposer que c'est un diviseur à croisements normaux simples.

Proposition 71. *Si k est le nombre de composantes irréductibles de $F = \pi^{-1}(s)$, il existe une numérotation des composantes irréductibles $F_1, \ldots, F_k$ de F et pour tout i compris entre 1 et k une paire (Y, Θ_i) tels que*

(1) $\Theta_i = \bar{A}_0 + B_i$ *où $\bar{A}_0$ est un $\mathbb{Q}$-diviseur ample et effectif et B_i est un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif,*

[47]Dans notre situation, S est affine, et quitte à réduire S, on peut écrire $-K_X \sim A + B$ avec A ample et B effectif, et $\Gamma = (1 - \varepsilon)\Delta + \varepsilon B$. La paire (X, Γ) est klt pour $\varepsilon > 0$ petit et $\varepsilon(-(K_X + \Delta)) - (K_X + \Gamma) \sim -(K_X + \Delta) + \varepsilon A$ est nef et gros, donc $|-m(K_X + \Delta)|$ est sans point base pour m suffisamment divisible.

[48]$\pi^{-1}(s)$ et $\mathrm{Exc}(g)$ ont bien sûr des composantes communes.

(2) $K_Y+\Theta_i \sim \bar{E}_i$ *où* $\bar{E}_i$ *est effectif,* g*-exceptionnel et n'a pas de composante commune avec* Θ_i*,*

(3) $\mathrm{Nklt}(Y,\Theta_i)=F_1\cup\cdots\cup F_i$ *et le coefficient de* F_i *dans* Θ_i *vaut* 1*, celui des* $F_1,\ldots,F_{i-1}$ *est* >1*, celui des* $F_{i+1},\ldots,F_k$ *est* <1*. En particulier,* $\Theta_1=\bar{A}_0+F_1+C_1$ *où* (Y,C_1) *est klt et* C_1 *ne contient pas* F_1 *dans son support*[49]*.*

Démonstration.
Etape 1. Construction d'un diviseur Θ_0 *auxiliaire.*
On écrit la décomposition :

$$K_Y+\Theta=g^*(K_X+\Delta)+E\sim E$$

où Θ et E sont effectifs, sans composante commune, E est g-exceptionnel et $g_*\Theta=\Delta$. Comme les composantes irréductibles F_j de $F=\pi^{-1}(s)$ peuvent être g-exceptionnelles, on écrit $E=\sum_j e_jF_j+\bar{E}$ où les e_j sont ≥ 0 et le support de $\bar{E}$ ne contient pas de F_j.
Evidemment, (Y,Θ) est klt, $\Theta\geq\Delta'=g^*A+B'$ (comme toujours, un $'$ désigne la transformée stricte) car on a supposé que A est suffisamment général. Finalement, $\Theta=g^*A+C$ où C est effectif et (Y,C) est klt. On note au passage que le support de $C+\mathrm{Exc}(g)$ est à croisements normaux simples. Soit N un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif et g-exceptionnel tel que g^*A-N soit ample. On remarque que pour tout $0<\varepsilon\leq 1$, $g^*A-\varepsilon N=(1-\varepsilon)g^*A+\varepsilon(g^*A-N)$ est encore ample. On vérifie facilement que pour $0<\varepsilon_0\leq 1$ convenable, la paire $(Y,C+\varepsilon_0N)$ est klt. On choisit $A_0\sim g^*A-\varepsilon_0N$ suffisamment général et on pose $B_0=C+\varepsilon N$ et $\Theta_0=A_0+B_0$; (Y,Θ_0) et (Y,B_0) sont des paires klt et les supports de Θ_0 et B_0 sont à croisements normaux simples. On peut également supposer ici que B_0 et E n'ont pas de composante commune, quitte à remplacer B_0, Θ_0 et E par les diviseurs obtenus en simplifiant les composantes communes.

Etape 2. Numérotation des composantes.
Soit l un entier, soient $G_1,G_2,\ldots,G_l$ des diviseurs amples généraux sur S passant par s et soit $G=G_1+\cdots+G_l$. Ecrivons $\pi^*G=\sum g_jF_j+\bar{G}$ où $\bar{G}$ ne contient pas de F_j dans son support. Si t_0 est un rationnel >0 et suffisamment petit *indépendamment de* l, alors la paire $(Y,t_0\bar{G})$ est klt. Choisissons maintenant l de sorte que $t_0g_j-e_j>1$ pour tout j compris entre 1 et k.

[49]On conseille au lecteur l'exercice suivant : soit $\pi:\tilde{S}\to S$ l'éclatement de deux points infiniment voisins dans une surface lisse S. On note E_1 et E_2 les deux courbes exceptionnelles, p le point de S tel que $\pi^{-1}(p)=E_1\cup E_2$. Soient C_m une courbe possédant une singularité nodale d'ordre m en p, $\Delta=0$ sur S. Alors, π est une log-résolution de Δ telle que $\pi^{-1}(p)\cup C'_m$ est à croisements normaux simples et on a $\mathrm{Nklt}(\tilde{S},\Theta_2)=E_1\cup E_2$ et $\mathrm{Nklt}(\tilde{S},\Theta_1)=E_1$ où $\Theta_1=(2/m)C'_m+E_1$, $\Theta_2=(3/m)C'_m+2E_1+E_2$ et $K_{\tilde{S}}+\Theta_i\sim_\pi 0$.

Ecrivons pour $0 < t \leq t_0$:

$$K_Y + \Theta_0 + t\pi^*G - \sum_j e_jF_j = K_Y + A_0 + B_0 + \sum_j (tg_j - e_j)F_j + t\bar{G}.$$

Choisissons des rationnels $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ strictements positifs de sorte que $A_0 + \sum_j \varepsilon_j F_j$ soit ample et de sorte que les rationnels $\dfrac{1 + \varepsilon_j + e_j}{g_j}$ soient deux à deux distincts et $< t_0$. On renumérote alors les composantes afin que

$$\frac{1 + \varepsilon_1 + e_1}{g_1} < \frac{1 + \varepsilon_2 + e_2}{g_2} < \cdots < \frac{1 + \varepsilon_k + e_k}{g_k}$$

et on pose $t_i = \dfrac{1 + \varepsilon_i + e_i}{g_i}$.

Etape 3. Construction des Θ_i.

L'identité ci-dessus se ré-écrit alors

$$K_Y + \Theta_0 + t_i\pi^*G - \sum_j e_jF_j = K_Y + (A_0 + \sum_{j=1}^k \varepsilon_jF_j) + B_0 + \sum_{j=1}^k (t_ig_j - e_j - \varepsilon_j)F_j + t_i\bar{G}.$$

Soit alors, comme dans la preuve du lemme 64, un $\mathbb{Q}$-diviseur $\bar{A}_0$ général et linéairement équivalent à $A_0 + \sum_{j=1}^k \varepsilon_jF_j$. On pose alors

$$\Theta_i = \bar{A}_0 + B_0 + \sum_{j=1}^k \max(t_ig_j - e_j - \varepsilon_j, 0)F_j + t_i\bar{G} \quad \text{et} \quad B_i = B_0 + \sum_{j=1}^k \max(t_ig_j - e_j - \varepsilon_j, 0)F_j + t_i\bar{G}.$$

Par construction, on a

$$K_Y + \Theta_i \sim K_Y + \Theta - \sum_{j=1}^k e_jF_j + \sum_{j=1}^k \big(\max(t_ig_j - e_j - \varepsilon_j, 0) - (t_ig_j - e_j - \varepsilon_j)\big)F_j$$

d'où

$$K_Y + \Theta_i \sim \bar{E} + \sum_{j=1}^k \big(\max(t_ig_j - e_j - \varepsilon_j, 0) - (t_ig_j - e_j - \varepsilon_j)\big)F_j =: \bar{E}_i.$$

La paire (Y, Θ_i) convient : en effet, si $t_ig_j - e_j - \varepsilon_j < 0$ alors $e_j > 0$ donc F_j est g-exceptionnelle. ■

7.7. **Deuxième étape de la preuve du théorème 60 : extension de sections.** Si Γ est un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif, on note $\{\Gamma\}$ sa partie fractionnaire.

Proposition 72. *Avec les notations précédentes, pour tout $1 \leq i \leq k$*

$$\kappa(F_i, K_{F_i} + \{\Theta_i\}_{|F_i}) \leq 0.$$

La preuve de cette proposition repose sur un théorème d'extension de sections dû à Hacon et M[c]Kernan ([HM06], Corollary 3.17). Il est l'aboutissement d'une série de travaux initiés par Siu, Tsuji et Takayama.

Théorème 73. (Hacon et M^cKernan) *Soient $\pi\ : Y \to S$ un morphisme projectif avec S affine, Y lisse de dimension d. Soit H un diviseur ample sur Y. Soient V une hypersurface lisse de Y et Γ un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif dont le support est à croisements normaux simples tel que $\Gamma = \{\Gamma\} + V$. Soit enfin C un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif dont le support ne contient pas V. On suppose*

(1) *que $K_V + (\Gamma - V)_{|V}$ est pseudo-effectif*
(2) *et qu'il existe un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif $G \sim K_Y + \Gamma + C$ ne contenant aucune intersection (non vide) de composantes de Γ.*

Alors, il existe un entier $k \geq 1$ tel que pour tout $m \geq 1$, l'image de l'application naturelle

$$H^0(Y, mk(K_Y + \Gamma + C) + k(d+1)H) \to H^0(V, mk(K_Y + \Gamma + C)_{|V} + k(d+1)H_{|V})$$

contient $H^0(V, mk(K_Y + \Gamma)_{|V} + kH_{|V})$ où l'inclusion

$$H^0(V, mk(K_Y + \Gamma)_{|V} + kH_{|V}) \subset H^0(V, mk(K_Y + \Gamma + C)_{|V} + k(d+1)H_{|V})$$

est induite par le diviseur $kmC_{|V} + kdH_{|V}$.

Montrons comment on utilise ce résultat pour démontrer la proposition 72.

Démonstration de la proposition 72. On le fait pour la “première composante”, à savoir F_1. On applique le résultat ci-dessus à $V = F_1$, $\Gamma = \Theta_1 = \bar{A}_0 + C_1 + F_1$ et $C = 0$. On peut toujours supposer qu'un multiple entier non nul de $K_V + (\Gamma - V)_{|V}$ est effectif (et donc certainement pseudo-effectif) sinon il n'y a rien à démontrer. La condition (1) est donc satisfaite.
De même, $K_Y + \Theta_1 \sim \bar{E}_1$, donc le lieu base de $K_Y + \Theta_1$ est contenu dans $\bar{E}_1$ (rappelons que S est affine donc ce qui vient de S peut être supposé sans point base). Or $\pi^{-1}(s) + \mathrm{Exc}(g) + \Delta'$ est un diviseur à croisements normaux simples et Θ_1 et $\bar{E}_1$ n'ont pas de composantes communes, une intersection de composantes de Θ_1 ne peut donc pas être incluse dans $\bar{E}_1$: la condition (2) est ainsi aussi satisfaite.
Le théorème précédent affirme alors qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que pour tout $m \geq 1$, l'image de l'application naturelle

$$H^0(Y, mk(K_Y + \Theta_1) + k(d+1)H) \to H^0(F_1, mk(K_{F_1} + \{\Theta_1\}_{|F_1}) + k(d+1)H_{|F_1})$$

contient $H^0(F_1, mk(K_{F_1} + \{\Theta_1\}_{|F_1}) + kH_{|F_1})$ où l'inclusion

$$H^0(F_1, mk(K_{F_1} + \{\Theta_1\}_{|F_1}) + kH_{|F_1}) \subset H^0(F_1, mk(K_{F_1} + \{\Theta_1\}_{|F_1}) + k(d+1)H_{|F_1})$$

est induite par le diviseur $kdH_{|F_1}$ et où H est un diviseur ample sur Y et d est la dimension de Y.

On en déduit que

$$\begin{aligned}\dim H^0(F_1, m(K_{F_1} + \{\Theta_1\}_{|F_1})) &\leq \dim H^0(F_1, mk(K_{F_1} + \{\Theta_1\}_{|F_1}) + kH_{|F_1}) \\ &\leq \mathrm{rg}(\pi_* \mathcal{O}_Y(mk(K_Y + \Theta_1) + k(d+1)H))_s \\ &= \mathrm{rg}(\pi_* \mathcal{O}_Y(mk(\bar{E}_1) + k(d+1)H))_s.\end{aligned}$$

Soit D un diviseur sur X tel que $g^*D - k(d+1)H$ soit effectif. On a finalement

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(\pi_* \mathcal{O}_Y(mk(\bar{E}_1) + k(d+1)H))_s &\leq \mathrm{rg}(\pi_* \mathcal{O}_Y(mk(\bar{E}_1) + g^*D))_s \\ &= \mathrm{rg}(f_*(g_* \mathcal{O}_Y(mk\bar{E}_1 + g^*D)))_s \\ &= \mathrm{rg}(f_* \mathcal{O}_X(D))_s\end{aligned}$$

puisque $g_* \mathcal{O}_Y(m\bar{E}_1) = \mathcal{O}_X$. On a bien $\kappa(F_1, K_{F_1} + \{\Theta_1\}_{|F_1}) \leq 0$.
Pour la composante F_i, il s'agit du même raisonnement avec $V := F_i$, $\Gamma := \{\Theta_i\} + F_i$ et $C = \Theta_i - \Gamma$. ■

7.8. **Dernière étape de la preuve du théorème 60.** Les notations et la situation sont celles de l'étape précédente. La proposition suivante termine la preuve du théorème 60.

Proposition 74. (1) *La composante F_1 est rationnellement connexe,*
(2) *pour tout $i \geq 2$, F_i est rationnellement connexe par chaînes modulo*

$$F_i \cap \mathrm{Nklt}(Y, \Theta_{i-1}) = F_i \cap (F_1 \cup \ldots \cup F_{i-1}),$$

ce qui signifie que pour tout $x \in F_i$, il existe une chaîne de courbes rationnelles joignant x à un point de $F_i \cap (F_1 \cup \ldots \cup F_{i-1})$.

Démonstration. On commence par démontrer le premier point. Comme F_1 est lisse, il suffit de montrer que F_1 est rationnellement connexe par chaînes (corollaire 39), autrement dit que son quotient rationnel $R := R(F_1)$ est réduit à un point.
Soit donc $t : F_1 \dashrightarrow R$ le quotient rationnel de F_1. On peut supposer que R est lisse. La paire klt $(F_1, \{\Theta_1\}_{|F_1})$ va jouer un rôle clé. Rappelons la liste de ses propriétés :

(1) la dimension de Kodaira de $K_{F_1} + \{\Theta_1\}_{|F_1}$ vaut 0 ou $-\infty$: ceci découle immédiatement de la proposition 72,
(2) $\{\Theta_1\}_{|F_1} = (\bar{A}_0)_{|F_1} + (C_1)_{|F_1}$ où $\bar{A}_0$ est ample sur Y, la paire $(F_1, (C_1)_{|F_1})$ est klt et

$$K_{F_1} + \{\Theta_1\}_{|F_1} \sim (\bar{E}_1)_{|F_1}$$

est effectif.

(3) soient $\varphi : \tilde{F}_1 \to F_1$ une suite d'éclatements qui lève les indéterminations de t et

$$\tilde{t} = t \circ \varphi : \tilde{F}_1 \to R$$

le morphisme composé. Alors la dimension de Kodaira de la restriction de

$$\varphi^*(K_{F_1} + \{\Theta_1\}_{|F_1})$$

à la fibre générale de $\tilde{t}$ est ≥ 0 (car supérieure ou égale à la dimension de Kodaira de la restriction de $\varphi^*(\bar{E}_1)_{|F_1}$ à la fibre générale de $\tilde{t}$!).

On utilise alors à nouveau le théorème de positivité d'images directes de Campana. Soient donc, comme ci-dessus, $\varphi : \tilde{F}_1 \to F_1$ une suite d'éclatements qui lève les indéterminations de t et $\tilde{t} = t \circ \varphi : \tilde{F}_1 \to R$ le morphisme composé. On écrit comme d'habitude la décomposition

$$K_{\tilde{F}_1} + \Omega = \varphi^*(K_{F_1} + \{\Theta_1\}_{|F_1}) + D$$

où Ω et D sont effectifs sans composantes communes, $\varphi_*(\Omega) = \{\Theta_1\}_{|F_1}$ et D est φ-exceptionnel. Les propriétés précédemment listées pour $(F_1, \{\Theta_1\}_{|F_1})$ se propagent à $(\tilde{F}_1, \Omega)$:

(1) la dimension de Kodaira de $K_{\tilde{F}_1} + \Omega$ vaut 0 ou $-\infty$,
(2) la dimension de Kodaira de la restriction de $K_{\tilde{F}_1} + \Omega$ à la fibre générale de $\tilde{t}$ est ≥ 0,
(3) $\Omega = \varphi^*(\bar{A}_0)_{|F_1} + \bar{B}$ où $(\tilde{F}_1, \bar{B})$ est klt.

D'après le lemme 70, il existe un diviseur H ample sur R tel que $\varphi^*(\bar{A}_0)_{|F_1} \sim 2\tilde{t}^*H + \Gamma$ où Γ est un diviseur effectif sur $\tilde{F}_1$ et la paire $(\tilde{F}_1, \bar{B} + \Gamma)$ est klt.
La paire $\bar{B} + \Gamma$ est klt et

$$K_{\tilde{F}_1/R} + \bar{B} + \Gamma \sim K_{\tilde{F}_1} - \tilde{t}^*K_R + \Omega - \varphi^*(\bar{A}_0)_{|F_1} + \varphi^*(\bar{A}_0)_{|F_1} - 2\tilde{t}^*H$$

donc

$$(K_{\tilde{F}_1/R} + \bar{B} + \Gamma)_{|\tilde{t}^{-1}(u)} \sim (K_{\tilde{F}_1} + \Omega)_{|\tilde{t}^{-1}(u)}$$

est de dimension de Kodaira ≥ 0.
Comme $\varphi^*(\bar{A}_0)_{|F_1} \sim 2\tilde{t}^*H + \Gamma$ et $\Omega = \varphi^*(\bar{A}_0)_{|F_1} + \bar{B}$, on en déduit alors que

$$\begin{aligned} 0 = \kappa(\tilde{F}_1, K_{\tilde{F}_1} + \Omega) &= \kappa(\tilde{F}_1, K_{\tilde{F}_1} + \bar{B} + \Gamma + 2\tilde{t}^*H) \\ &\geq \kappa(R, K_R + H). \end{aligned}$$

Or R n'est pas uniréglé (théorème 50), le théorème 19 affirme donc que K_R est pseudo-effectif, et par suite que

$$\kappa(R, K_R + H) = \dim R.$$

Contradiction sauf si R est un point ! C'est magnifique et ça termine la preuve du premier point.

Pour montrer que F_i est rationnellement connexe par chaînes modulo

$$F_i \cap \mathrm{Nklt}(Y, \Theta_{i-1}) = F_i \cap (F_1 \cup \ldots \cup F_{i-1}),$$

il suffit d'observer que si $t\ : F_i \dashrightarrow R(F_i)$ est le quotient rationnel de F_i, alors soit

$$F_i \cap \mathrm{Nklt}(Y, \Theta_{i-1}) = F_i \cap (F_1 \cup \ldots \cup F_{i-1})$$

domine $R(F_i)$, soit le même raisonnement que précédemment montre que $R(F_i)$ est réduit à un point. ■

Références

[AKMW02] D. Abramovich, K. Karu, K. Matsuki, J. Włodarczyk. Torification and factorization of birational maps. *J. Amer. Math. Soc.* **15***, no. 3, (2002), 531–572.*

[AK03] C. Araujo, J. Kollár. Rational curves on varieties. *Higher dimensional varieties and rational points (Budapest, 2001), 13–68, Bolyai Soc. Math. Stud.,* **12***, Springer, Berlin, 2003.*

[Bea95] A. Beauville. Quantum cohomology of complete intersections. *Matematicheskaya Fizika, Analiz, Geometriya,* **2** *(1995), 384–398.*

[BCHM10] C. Birkar, P. Cascini, C.D. Hacon, J. M^{c}Kernan. Existence of minimal models for varieties of log general type. *J. Amer. Math. Soc.* **23***, no. 2, (2010), 405–468.*

[Bon02] L. Bonavero. Factorisation faible des applications birationnelles (d'après Abramovich, Karu, Matsuki, Włodarczyk et Morelli). *Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001. Astérisque* **No. 282** *(2002), Exp. No. 880, vii, 1–37.*

[BCW02] L. Bonavero, F. Campana, J.A. Wiśniewski. Variétés projectives complexes dont l'éclatée en un point est de Fano. *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **334** *(2002), 463–468.*

[BH10] L. Bonavero, A. Höring. Counting conics in complete intersections. *Proceedings of the Conference Complex Geometry Jan. 11-17 2009, Hanoi National University of Education (ed. H. Esnault, Y.T. Siu, E. Viehweg). Acta Mathematica Vietnamica, Vol.* **35***, 1 (2010), 23–30.*

[BDPP04] S. Boucksom, J.P. Demailly, M. Păun, T. Peternell. The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension. *Prépublication, arXiv:math/0405285.*

[BP09] A. Broustet, G. Pacienza. Rational connectedness modulo the Non-nef locus. *à paraître dans Commentarii Mathematici Helvetici. Preprint arXiv:0901.4494.*

[Cam81] F. Campana. Coréduction algébrique d'un espace analytique faiblement Kählérien compact. *Inv. Math.,* **63** *(1981), 187–223.*

[Cam92] F. Campana. Connexité rationnelle des variétés de Fano. *Ann. Sc. ENS.* **25** *(1992), 539–545.*

[Cam04a] F. Campana. Orbifolds, special varieties and classification theory. *Annales de l'Institut Fourier,* **54***, no. 3, (2004), 499–630.*

[Cam04b] F. Campana. Orbifolds, special varieties and classification theory: appendix. *Annales de l'Institut Fourier,* **54***, no. 3,(2004), 631–665.*

[Cha04] A. Chambert-Loir. Points rationnels et groupes fondamentaux : applications de la cohomologie p-adique (d'après P. Berthelot, T. Ekedahl, H. Esnault, etc.). *Séminaire Bourbaki, Vol. 2002/03. Astérisque* **No. 294** *(2004), Exp. No. 914, viii, 125–146.*

[CMS02] K. Cho, Y. Miyaoka, N. Shepherd-Barron. Characterizations of projective space and applications to complex symplectic manifolds. *Higher dimensional birational geometry (Kyoto, 1997), Adv. Stud. Pure Math.,* **35***, Math. Soc. Japan, Tokyo, (2002), 1–88.*

[CKM88] H. Clemens, J. Kollár, S. Mori. Higher Dimensional Complex Geometry. *Astérisque* **166** *1988.*

[Cor07] A. Corti (éd). Flips for 3-folds and 4-folds. *Oxford Lecture Series in Mathematic and its Applications, vol.* **35***, The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford, 2007.*

[Deb97] O. Debarre. Variétés de Fano. *Séminaire Bourbaki, Vol. 1996/97. Astérisque* **No. 245** *(1997), Exp. No. 827, iv, 197–221.*

[Deb01] O. Debarre. Higher-dimensional algebraic geometry. *Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.*

[Deb03] O. Debarre. Variétés rationnellement connexes (d'après T. Graber, J. Harris, J. Starr et A. J. de Jong). *Séminaire Bourbaki. Vol. 2001/2002. Astérisque* **No. 290** *(2003), Exp. No. 905, ix, 243–266.*

[Deb06] O. Debarre. Classes de cohomologie positives dans les variétés kählériennes compactes (d'après Boucksom, Demailly, Nakayama, Păun, Peternell et al.). *Séminaire Bourbaki. Vol. 2004/2005. Astérisque* **No. 307** *(2006), Exp. No. 943, viii, 199–228.*

[Deb08] O. Debarre. Systèmes pluricanoniques sur les variétés de type général (d'après Hacon-McKernan, Takayama, Tsuji). *Séminaire Bourbaki. Vol. 2006/2007. Astérisque* **No. 317** *(2008), Exp. No. 970, vii, 119–140.*

[DM98] O. Debarre, L. Manivel. Sur la variété des espaces linéaires contenus dans une intersection complète. *Math. Ann.* **312***, no. 3, (1998), 549–574.*

[Dru08] S. Druel. Existence de modèles minimaux pour les variétés de type général. *Séminaire Bourbaki, Vol. 2007/08. Exp. No. 982.*

[GHS03] T. Graber, J. Harris, J. Starr. Families of rationally connected varieties. *J. Amer. Math. Soc.* **16***, no. 1, (2003), 57–67.*

[HM06] C.D. Hacon, J. M^{c}Kernan. Boundedness of pluricanonical maps of varieties of general type. *Invent. Math.* **166***, no.1, (2006), 1–25.*

[HM07] C.D. Hacon, J. M^{c}Kernan. On Shokurov's rational connectedness conjecture. *Duke Math. J.* **138***, no. 1, (2007), 119–136.*

[HH83] R. Hartshorne, A. Hirschowitz. Smoothing algebraic space curves. *Algebraic geometry, Sitges (Barcelona), (1983), 98–131, Lecture Notes in Math.,* **1124***, Springer, Berlin, 1985.*

[Hir64] H. Hironaka. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II. *Ann. of Math. (2)* **79***, (1964), 109–203; ibid. (2)* **79** *(1964), 205–326.*

[Hir75] H. Hironaka. Flattening theorem in complex-analytic geometry. *Amer. J. Math.* **97** *(1975), 503–547.*

[IP99] V.A. Iskovskikh, Y.G. Prokhorov. Fano varieties. Algebraic geometry, V. *Encyclopaedia Math. Sci.* **47***, Springer-Verlag, Berlin, 1999.*

[Jin05] M. Jinzenji. Coordinate Change of Gauss-Manin System and Generalized Mirror Transformation. *Int. J. Mod. Phys.* **A20** *(2005), 2131–2156.*

[JNS04] M. Jinzenji, I. Nakamura, Y. Suzuki. Conics on a Generic Hypersurface *Prépublication, arXiv:math/0412527.*

[KMM87] Y. Kawamata, K. Matsuda, K. Matsuki. Introduction to the minimal model problem. *Adv. Stud. Pure Math.* **10***, Alg. Geom., Sendai, T. Oda ed (1985),283–360.*

[Keb02] S. Kebekus. Characterizing the projective space after Cho, Miyaoka and Shepherd-Barron. *Festschrift in honor of Hans Grauert. Complex geometry (Göttingen, 2000), Springer, Berlin (2002), 147–155.*

[Kol95] J. Kollár. Nonrational hypersurfaces. *J. Amer. Math. Soc.* **8***, no. 1, (1995), 241–249.*

[Kol96] J. Kollár. Rational curves on algebraic varieties. *Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete.* **3** *Folge* **032***, Springer-Verlag, 1996.*

[Kol97] J. Kollár. Singularities of pairs. *Algebraic geometry—(Santa Cruz, 1995), 221–287, Proc. Sympos. Pure Math.,* **62***, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.*

[KM98] J. Kollár, S. Mori. Birational geometry of algebraic varieties. *Cambridge Tracts in Mathematics, Vol.* **134***, Cambridge University Press, Cambridge 1998, With the collaboration of C.H. Clemens and A. Corti, Translated from the 1998 Japanese original.*

[KMM92] J. Kollár, Y. Miyaoka, S. Mori. Rational Connectedness and Boundedness of Fano Manifolds. *J. Diff. Geom.* **36** *(1992), 765–769.*

[Lan03] J.M. Landsberg. Lines on projective varieties. *J. reine angew. Math.* **562** *(2003), 1–3.*

[Laz84] R. Lazarsfeld. Some applications of the theory of positive vector bundles. *Complete intersections (Acireale, 1983), 29-61, Lecture Notes in Math.* **1092***, Springer-Verlag, Berlin, 1984.*

[Laz04] R. Lazarsfeld. Positivity in algebraic geometry II. *Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete.* **3** *Folge* **49***, Springer-Verlag, 2004.*

[Mar00] M.R. Marchisio. Unirational quartic hypersurfaces. *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat.* **(8)** *3 (2000), no. 2, 301–314.*

[Mar06] M.R. Marchisio. A $54-(114-)$ dimensional family of smooth unirational quartic $3-(4-)$ folds. *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat.* **(8)** *9 (2006), no. 3, 733–748.*

[Mat01] K. Matsuki. Introduction to the Mori program. *Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.*

[Mor79] S. Mori. Projective manifolds with ample tangent bundles. *Ann. of Math.* **110** (1979), 593–606.

[Mor82] S. Mori. Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective. *Ann. of Math.* **116** *(1982), 133–176.*

[MM81] S. Mori, S. Mukai. Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$. *Manuscripta Math.* **36** *(1981), 147–162.*

[Pac03] G. Pacienza. Rational curves on general projective hypersurfaces. *J. Algebraic Geom.* **12***, no. 2, (2003), 245–267.*

[Wis91] J.A. Wiśniewski. On contractions of extremal rays of Fano manifolds. *J. reine angew. Math.* **417** *(1991), 141–157.*

[Zha06] Q. Zhang. Rational connectedness of log $\mathbb{Q}$-Fano varieties. *J. reine angew. Math.* **590** *(2006), 131–142.*