J. ALGEBRAIC GEOMETRY
13 (2004) 427–439
S 1056-3911(03)00356-4
Article electronically published on December 8, 2003

SINGULARITÉS SYMPLECTIQUES

STÉPHANE DRUEL

Abstract

We classify isolated symplectic singularities of dimension greater or equal to 6 such that the normalized blow-up of the singular point is a resolution of singularities whose exceptional locus is a reduced simple normal crossing divisor with at least two irreducible components. They are isomorphic to the quotient singularities of type $\frac{1}{3}(1, 2, \ldots, 1, 2)$.

Introduction

Soit (V, o) un germe de singularité complexe analytique *normal.* La singularité est dite *symplectique* s'il existe une 2-forme symplectique φ sur le lieu régulier $\mathrm{V}_{\mathrm{reg}}$ de V, i.e., une *2-forme holomorphe fermée* et *non dégénérée*, et si pour toute résolution $\pi : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{V}$ des singularités de V, le pull-back de φ à $\pi^{-1}(\mathrm{V}_{\mathrm{reg}})$ est la restriction d'une 2-forme holomorphe sur X (*voir* [Be00], définition 1.1). Si le lieu singulier de V est de codimension ≥ 4 alors la dernière condition est toujours vérifiée (*voir* [Fl88]).

Une algèbre de Lie complexe simple a une plus petite orbite nilpotente non nulle $\mathcal{O}_{min}$ pour l'action adjointe; son adhérence $\overline{\mathcal{O}}_{min} = \mathcal{O}_{min} \cup \{0\}$ a une singularité symplectique isolée en 0 isomorphe au cône sur la variété lisse $\mathbf{P}\mathcal{O}_{min}$ des droites de $\mathcal{O}_{min}$ et *toute singularité symplectique isolée dont le cône tangent est lisse, est analytiquement isomorphe à* $(\overline{\mathcal{O}}_{min}, 0)$ *pour une algèbre de Lie complexe simple convenable* (*voir* [Be00]).

Fixons un entier $n > 0$. Soit ζ une racine primitive cubique de l'unité et soit $\langle\zeta\rangle$ le groupe cyclique d'ordre 3 engendré par ζ. Soit $\mathrm{V} = \mathbf{C}^{2n} \diagup \langle\zeta\rangle$ où $\langle\zeta\rangle$ agit sur $\mathbf{C}^{2n}$ par la formule

$$\zeta.(z_1,\, z_2, \ldots,\, z_{2n-1},\, z_{2n}) = (\zeta z_1,\, \zeta^2 z_2, \ldots,\, \zeta z_{2n-1},\, \zeta^2 z_{2n}).$$

La 2-forme symplectique $\sum_{i=1}^{n} dz_{2i-1} \wedge dz_{2i}$ sur $\mathbf{C}^{2n}$ est invariante sous $\langle\zeta\rangle$ et induit une 2-forme symplectique sur $\mathrm{V}_{\mathrm{reg}}$. Notons 0 l'unique point singulier de V. Soit $\pi : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{V}$ l'éclatement normalisé de 0 dans V. Le diviseur $\pi^{-1}(0)$ est réduit et globalement à croisements normaux (*voir* §1). Nous prouvons le

Received January 4, 2002.

Théorème. *Soit* (V, o) *une singularité symplectique isolée de dimension* $2n \geq 6$ *et soit* $\pi : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{V}$ *l'éclatement normalisé de* o *dans* V. *On suppose que le diviseur* $\pi^{-1}(\mathrm{o})$ *est réduit, globalement à croisements normaux et qu'il a au moins deux composantes irréductibles. Alors* (V, o) *est analytiquement isomorphe à la singularité quotient* $(\mathbf{C}^{2n}/\langle\zeta\rangle, 0)$.

L'hypothèse $n \geq 3$ permet d'obtenir l'annulation de certains groupes de cohomologie (*voir* lemme 3.6).

Soit $\mathrm{F} := \mathbf{P}_{\mathbf{P}^{n-1}}(\mathcal{E})$ où $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(2) \oplus \mathrm{H}^0(\mathbf{P}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}$ et soit p_{F} le morphisme vers $\mathbf{P}^{n-1}$. Soient p et q les projections de $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ sur $\mathbf{P}^{n-1}$ et soit i l'immersion fermée $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1} \subset \mathrm{F}$ au dessus de $\mathbf{P}^{n-1}$ correspondant au quotient inversible sur $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$

$$p^*\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbf{P}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}} \twoheadrightarrow q^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(1)$$

où $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ est considéré comme variété sur $\mathbf{P}^{n-1}$ via p. Soit enfin $j := i \circ s$ où s est l'involution naturelle de $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^{n-1}} \times \mathbf{P}_{\mathbf{P}^{n-1}}$. Nous montrons que le lieu exceptionnel est isomorphe au recollement de deux copies de F le long de $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ via les immersions fermées i et j puis nous montrons que le complété formel de X le long du diviseur exceptionnel est déterminé à isomorphisme près par le germe de singularité (V, o). Le résultat cherché est alors une conséquence du premier théorème de comparaison de la théorie "algébrique" à la théorie "formelle" (*voir* [Gr66], Chap. III, théorème 4.1.5) et du théorème d'approximation d'Artin (*voir* [Ar68], corollaire 1.6).

1. Exemple et géométrie torique

Nous renvoyons à [Od88] pour les définitions et propriétés des variétés toriques. Fixons un entier $n \geq 1$. Soit $\mathrm{N}_0 = \mathbf{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}e_{2n}$ un $\mathbf{Z}$-module libre de rang $2n$ et soit $\mathrm{N} = \mathrm{N}_0 + \frac{\mathbf{Z}}{3}(1, -1, \ldots, 1, -1) \subset \mathrm{N}_0 \otimes \mathbf{R}$. Soit $\mathrm{M} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathrm{N}, \mathbf{Z})$. Soit enfin $\sigma = \langle e_1, \ldots, e_{2n}\rangle \subset \mathrm{N} \otimes \mathbf{R}$. La variété affine V est torique et son algèbre de fonctions est $\mathbf{C}[z_1, \ldots, z_{2n}]^{\langle\zeta\rangle} = \mathbf{C}[\mathrm{M} \cap \sigma^\vee]$ (*voir* [Od88], §1.5). Soit $(e_1^*, \ldots, e_{2n}^*)$ la base duale de $(e_1, \ldots, e_{2n})$. Les fonctions

$$\begin{cases} z_{2i}z_{2j-1} & (i, j \in \{1, \ldots, n\}), \\ z_{2i}z_{2j}z_{2k} & (i, j, k \in \{1, \ldots, n\}), \\ z_{2i-1}z_{2j-1}z_{2k-1} & (i, j, k \in \{1, \ldots, n\}), \end{cases}$$

sont invariantes sous le groupe $\langle\zeta\rangle$ et forment un système minimal de générateurs sur $\mathbf{C}$ de l'algèbre $\mathbf{C}[z_1, \ldots, z_{2n}]^{\langle\zeta\rangle}$, autrement dit, les éléments

$$\begin{cases} e_{2i}^* + e_{2j-1}^* & (i, j \in \{1, \ldots, n\}), \\ e_{2i}^* + e_{2j}^* + e_{2k}^* & (i, j, k \in \{1, \ldots, n\}), \\ e_{2i-1}^* + e_{2j-1}^* + e_{2k-1}^* & (i, j, k \in \{1, \ldots, n\}), \end{cases}$$

forment *une base de Hilbert* du monoide $\mathrm{M} \cap \sigma^\vee$. Soient

$$e_{2n+1} = \frac{1}{3}(1, 2, \ldots, 1, 2) \quad \text{et} \quad e_{2n+2} = \frac{1}{3}(2, 1, \ldots, 2, 1).$$

L'éclatement normalisé X de l'idéal $\mathfrak{m}$ de 0 dans V est la variété torique *lisse* dont l'éventail est l'ensemble des cônes *réguliers*

$$\begin{cases} \sigma_{i,j} = \langle e_1, \ldots, \widehat{e}_{2i}, \ldots, \widehat{e}_{2j-1}, \ldots, e_{2n+2}\rangle & (i, j \in \{1, \ldots, n\}), \\ \sigma'_i = \langle e_1, \ldots, \widehat{e}_{2i}, \ldots, \widehat{e}_{2n+1}, e_{2n+2}\rangle & (i \in \{1, \ldots, n\}), \\ \sigma''_j = \langle e_1, \ldots, \widehat{e}_{2j-1}, \ldots, e_{2n+1}, \widehat{e}_{2n+2}\rangle & (j \in \{1, \ldots, n\}), \end{cases}$$

et de leurs faces. Le lieu exceptionnel est un diviseur globalement à croisements normaux réunion des deux diviseurs irréductibles $\mathrm{V}(e_{2n+1})$ et $\mathrm{V}(e_{2n+2})$.

L'idéal $\mathfrak{m}\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ du diviseur $\pi^{-1}(0)$ est engendré par la fonction $z_{2i}z_{2j-1}$ (resp. z_{2i}^3 et z_{2j-1}^3) sur l'ouvert affine $\mathrm{U}_{\sigma_{2i,\,2j-1}}$ $(i, j \in \{1, \ldots, n\})$ (resp. $\mathrm{U}_{\sigma'_i}$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$ et $\mathrm{U}_{\sigma''_j}$ $(j \in \{1, \ldots, n\})$). Notons $v_i = e_i$ pour $1 \leq i \leq 2n-1$ et $v_{2n} = e_{2n+2}$. Soit $(v_1^*, \ldots, v_{2n}^*)$ la base duale de $(v_1, \ldots, v_{2n})$. Les éléments $(v_i)_{1\leq i\leq 2n}$ forment une base du $\mathbf{Z}$-module M et l'algèbre des fonctions régulières sur l'ouvert $\mathrm{U}_{\sigma'_n}$ est l'algèbre sur $\mathbf{C}$ du monoide libre engendré par ces éléments. On a $v_{2i}^* = e_{2i}^* - e_{2n}^*$ pour $1 \leq i \leq n-1$, $v_{2i-1}^* = e_{2i-1}^* - 2e_{2n}^*$ pour $2 \leq i \leq n$ et $v_{2n}^* = 3e_{2n}^*$. Le diviseur $\pi^{-1}(0)$ est donc localement défini par l'annulation d'une coordonnée sur l'ouvert considéré et en particulier réduit le long de $\mathrm{V}(e_{2n+2})$. On vérifie que ce diviseur est également réduit le long de $\mathrm{V}(e_{2n+1})$.

2. Préliminaires

2.1. Soit X une variété projective lisse sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Soit $\mathrm{N}_1(\mathrm{X}) = (\{1\text{-cycles}\}/\equiv) \otimes \mathbf{R}$ où $\equiv$ désigne l'équivalence numérique. On considère le cône $\mathrm{NE}(\mathrm{X}) \subset \mathrm{N}_1(\mathrm{X})$ engendré par les classes des 1-cycles effectifs. Une *arête extrémale* est une demi-droite R dans $\overline{\mathrm{NE}}(\mathrm{X})$, adhérence de $\mathrm{NE}(\mathrm{X})$ dans $\mathrm{N}_1(\mathrm{X})$, vérifiant $\mathrm{K}_{\mathrm{X}}.\mathrm{R}^* < 0$ et telle que pour tout $\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2 \in \overline{\mathrm{NE}}(\mathrm{X})$, si $\mathrm{Z}_1 + \mathrm{Z}_2 \in \mathrm{R}$ alors $\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2 \in \mathrm{R}$. Une *courbe rationnelle extrémale* est une courbe rationnelle irréductible C telle que $\mathbf{R}^+[\mathrm{C}]$ soit une arête extrémale et $-\mathrm{K}_{\mathrm{X}}.\mathrm{C} \leq \dim(\mathrm{X}) + 1$. *Toute arête extrémale* R *est engendrée par une courbe rationnelle extrémale* et admet une *contraction*, c'est-à-dire qu'il existe une variété projective normale Y et un morphisme $\phi : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$, surjectif à fibres connexes, contractant les courbes irréductibles C telles que $[\mathrm{C}] \in \mathrm{R}$ (théorème de Kawamata et Shokurov).

Rappelons un résultat de J. Wisniewski (*voir* [Wi91]) sur le lieu exceptionnel d'une contraction extrémale. Soit F une composante irréductible d'une fibre non triviale d'une contraction élémentaire associée à l'arête extrémale R. Nous appelons *lieu de* R, le lieu des courbes dont la classe d'équivalence numérique appartient à R. On a alors l'inégalité

$$\dim(\mathrm{F}) + \dim(\text{lieu de R}) \geq \dim(\mathrm{X}) + \ell(\mathrm{R}) - 1,$$

où $\ell(\mathrm{R})$ désigne la *longueur* de l'arête extrémale R:

$$\ell(\mathrm{R}) = \inf\{-\mathrm{K_X}.\mathrm{C}_0 \,|\, \mathrm{C}_0 \text{ étant une courbe rationnelle et } \mathrm{C}_0 \in \mathrm{R}\}.$$

Lemme 2.2. *Soit* X *une variété projective de dimension* $n \geq 2$ *et soit* $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$ *un diviseur effectif. Soit* D *un diviseur numériquement effectif. Si* $-\mathrm{K_X} \equiv \mathrm{D} + \mathrm{Y}$ *alors il existe une arête extrémale* R *telle que* $\mathrm{Y}.\mathrm{R}^* > 0$.

Démonstration. Soit $\mathrm{C} \subset \mathrm{X}$ une courbe telle que $\mathrm{Y}.\mathrm{C} > 0$. La courbe C se décompose $\mathrm{C} \equiv \mathrm{C}_0 + \sum_{i \in \mathrm{I}} a_i \mathrm{C}_i$ avec $\mathrm{C}_0 \in \overline{\mathrm{NE}}^+(\mathrm{X}) = \{z \in \overline{\mathrm{NE}}(\mathrm{X}) \,|\, \mathrm{K_X}.z \geq 0\}$ et $(\mathrm{C}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est l'ensemble des courbes rationnelles extrémales (*voir* [Mo82], théorème 1.5). Les coefficients $(a_i)_{i \in \mathrm{I}}$ sont positifs ou nuls et presque tous nuls. On a $\mathrm{Y}.\mathrm{C}_0 = -\mathrm{K_X}.\mathrm{C}_0 - \mathrm{D}.\mathrm{C}_0 \leq 0$ et il existe donc un élément $i \in \mathrm{I}$ tel que $a_i \mathrm{C}_i.\mathrm{Y} > 0$. □

2.3. Fixons quelques notations. Soient $a \in \mathbf{Z}$ et $k \geq 2$. Soit $\mathrm{F}_a := \mathbf{P}_{\mathbf{P}^{k-1}}(\mathcal{E}_a)$ où $\mathcal{E}_a = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(a) \oplus \mathrm{H}^0(\mathbf{P}^{k-1}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}$ et soit p_a le morphisme vers $\mathbf{P}^{k-1}$. Soient p et q les projections de $\mathbf{P}^{k-1} \times \mathbf{P}^{k-1}$ sur $\mathbf{P}^{k-1}$ et soit enfin i_a l'immersion fermée $\mathbf{P}^{k-1} \times \mathbf{P}^{k-1} \subset \mathrm{F}_a$ au dessus de $\mathbf{P}^{k-1}$ correspondant au quotient inversible sur $\mathbf{P}^{k-1} \times \mathbf{P}^{k-1}$

$$p^*\mathcal{E}_a \twoheadrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbf{P}^{k-1}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1} \times \mathbf{P}^{k-1}} \twoheadrightarrow q^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(1)$$

où $\mathbf{P}^{k-1} \times \mathbf{P}^{k-1}$ est considéré comme variété sur $\mathbf{P}^{k-1}$ via p.

Proposition 2.4. *Soit* (W, L) *une variété polarisée de dimension* $m \geq 2$ *et soit* $\mathrm{Y} = \bigcup_{i=1}^{l} \mathrm{Y}_i$ *un diviseur réduit et globalement à croisements normaux. On suppose* $\omega_{\mathrm{W}} \simeq \mathrm{L}^{-k}(-\mathrm{Y})$.

1. *Si* $k > \frac{m+1}{2}$ *et* $l = 1$ *ou* $k \geq \frac{m+1}{2}$ *et* $l \geq 2$ *alors* W *est de Fano et* $b_2(\mathrm{W}) = 1$.
2. *Si* $k = \frac{m+1}{2}$ *et* $l = 1$ *alors* $\mathrm{Y} \subset \mathrm{W}$ *est isomophe à* $\mathrm{Q}_2 \subset \mathbf{P}^3$ *ou* $\mathrm{Y} \subset \mathrm{W}$ *est isomophe à* $\mathrm{Q}_2 \subset \mathrm{Q}_3$ *ou* Y *et* W *sont de Fano et* $b_2(\mathrm{Y}) = b_2(\mathrm{W}) = 1$ *ou* $\mathrm{Y} \subset \mathrm{W}$ *est isomorphe à* $\mathbf{P}^{k-1} \times \mathbf{P}^{k-1} \subset \mathrm{F}_a$ *pour un entier* $a \geq 0$ *convenable,* L *est isomorphe au fibré* $\mathcal{O}_{\mathrm{F}_a}(1) \otimes p_a^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(1))$ *et l'idéal de* Y *dans* W *est* $\mathrm{L}^{\otimes -1} \otimes p_a^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(a+1)$.

Démonstration. La première partie de la proposition se montre par récurrence sur la dimension $m \geq 2$ de W. Si $m = 2$ alors $k \geq 2$ et, par le lemme 2.2, il existe une arête extrémale R telle que $\mathrm{R}^*.\mathrm{Y} > 0$ et donc de longueur ≥ 3. La surface W est donc de Fano et de nombre de Picard 1 (*voir* [Wi89], proposition 2.4.1).

Supposons la proposition démontrée jusqu'en dimension $m - 1 \geq 2$ et considérons W comme dans l'énoncé. Soit C_1 une courbe rationnelle extrémale telle que $\mathrm{Y}.\mathrm{C}_1 > 0$ et $\mathrm{R}_1 = \mathbf{R}_+[\mathrm{C}_1]$ et supposons par exemple $\mathrm{Y}_1.\mathrm{C}_1 > 0$ (*voir* lemme 2.2). Notons $\mathrm{W} \xrightarrow{\varphi_1} \mathrm{Z}_1$ la contraction élémentaire correspondante. La formule d'adjonction donne $\omega_{\mathrm{Y}_1} \simeq \mathrm{L}_{|\mathrm{Y}_1}^{-k}(-\sum_{i\neq 1} \mathrm{Y}_i \cap \mathrm{Y}_1)$ avec $k \geq \frac{m+1}{2} > \frac{\dim(\mathrm{Y}_1)+1}{2}$. Si $\sum_{i\neq 1} \mathrm{Y}_i \cap \mathrm{Y}_1 \neq \emptyset$ alors, par hypothèse de récurrence, Y_1 est de Fano et $b_2(\mathrm{Y}_1) = 1$. Si $\sum_{i\neq 1} \mathrm{Y}_i \cap \mathrm{Y}_1 = \emptyset$ alors Y_1 est de Fano et $b_2(\mathrm{Y}_1) = 1$ sauf si $k = \frac{m+1}{2}$ et $(\mathrm{Y}_1, \mathrm{L}_{|\mathrm{Y}_1}) \simeq (\mathbf{P}^{k-1} \times \mathbf{P}^{k-1}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(1))$ (*voir* [Wi90]).

Soit F_1 la fibre de φ_1 contenant C_1. La fibre F_1 rencontre en particulier Y_1 et $\dim(\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{Y}_1) \geq \dim(\mathrm{F}_1) - 1 \geq \ell(\mathrm{R}_1) - 2 \geq \frac{m-1}{2} > 0$. Soit $\mathrm{C} \subset \mathrm{F}_1 \cap \mathrm{Y}_1$ une courbe irréductible. La courbe C est contractée par φ_1 et on a donc $\mathrm{C} \in \mathrm{R}_1$ et $\mathrm{C}.\mathrm{Y}_1 > 0$. Notons que par tout point de Y_1 il passe une courbe tracée sur Y_1 numériquement proportionnelle à C et donc contractée par φ_1. La contraction élémentaire φ_1 est donc divisorielle ou de type fibrée. Si φ_1 est divisorielle alors R_1 n'est pas numériquement effective, autrement dit, il existe un diviseur irréductible D tel que $\mathrm{D}.\mathrm{C} < 0$. On a donc $\mathrm{C} \subset \mathrm{D}$ et $\mathrm{Y}_1 = \mathrm{D}$, ce qui est impossible puisque $\mathrm{C}.\mathrm{Y}_1 > 0$. La contraction φ_1 est donc de type fibrée.

Supposons $b_2(\mathrm{Y}_1) = 1$**.** Le diviseur Y_1 est donc contracté sur un point par φ_1 et, puisque $\mathrm{Y}_1.\mathrm{C} > 0$, $\dim(\mathrm{Z}_1) = 0$. La variété X est donc de Fano de nombre de Picard 1.

Supposons $\mathrm{Y}_1 \simeq \mathbf{P}^{k-1} \times \mathbf{P}^{k-1}$ **et** $\mathrm{L}_{|\mathrm{Y}_1} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(1)$**.** Notons (a, b) le bidegré de la courbe $\mathrm{C} \subset \mathrm{Y}_1$.

Supposons $a > 0$ et $b > 0$. Alors, par tout couple de points de Y_1, il passe une courbe tracée sur Y_1 de bidegré (a, b) et donc numériquement proportionnelle à C dans W. Le diviseur Y_1 est donc contracté sur un point par φ_1. Le morphisme $\mathrm{Y}_1 \xrightarrow{\varphi_{1|\mathrm{Y}_1}} \mathrm{Z}_1$ est surjectif puisque $\mathrm{Y}_1.\mathrm{C} > 0$. Finalement, Z_1 est de dimension 0 et $b_2(\mathrm{W}) = 1$. On en déduit que $k = 2$ par le théorème de Lefschetz, puis que W est une quadrique et Y_1 une section hyperplane ou que W est un espace projectif et Y_1 une quadrique par le théorème de Kobayashi et Ochiai (*voir* [KO73]).

Supposons maintenant $(a, b) = (0, 1)$. Notons p la première projection de Y_1 sur $\mathbf{P}^{k-1}$. Soit $\mathrm{F} \subset \mathrm{Y}_1$ une fibre ensembliste de $\varphi_{1|\mathrm{Y}_1}$. Les courbes tracées sur Y_1 de bidegré $(0,1)$ sont contractées par φ_1 et on a donc $F = p^{-1}(p(F))$. S'il existe une courbe C_2 tracée sur F de bidegré (a_1, b_1) avec $a_1 > 0$ alors le 1-cycle $C_2 + C_1 \in R_1$ est de bidegré (a_1, b_1+1) avec $a_1 > 0$ et $b_1 + 1 > 0$ et les arguments utilisés ci-dessus suffisent pour conclure. On peut donc supposer que les courbes tracées sur F sont de bidegré $(0,*)$. On en déduit que $p(F)$ est de dimension 0 puis que F est équidimensionnelle de dimension $k-1$ et que Z_1 est de dimension $k-1$. Soit $F_1 \subset W$ une composante irréductible d'une fibre de φ_1 ; F_1 rencontre Y_1 puisque $R^*.Y_1 > 0$ et $\dim(F_1 \cap Y_1) = k-1$. On a donc $\dim(F_1) = k$. Le morphisme φ_1 est donc équidimentionnel de dimension k. Soit F_1 une fibre générique de φ_1. On a $\omega_{F_1} = L_{|F_1}^{-k} \otimes \mathcal{O}_{F_1}(-Y))$. Le fibré $\mathcal{O}_{F_1}(Y))$ est numériquement effectif puisque $R_1^*.Y > 0$ et F_1 est donc de Fano. Soit R_{F_1} une arête extrémale de F_1. On a $\ell(R_{F_1}) \geq \dim(F_1) + 1$ et donc $b_2(F_1) = 1$ (*voir* [Wi89], proposition 2.4.1). On en déduit $(F_1, L_{|F_1}) = (\mathbf{P}^k, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^k}(1))$ puis que φ_1 est un fibré en espaces projectifs localement trivial pour la topologie de Zariski (*voir* [Fu87], lemme 2.12) et en particulier que Z_1 est lisse. La fibre ensembliste $F_1 \subset \mathbf{P}^k$ de $\varphi_{1|Y_1}$ est réunion disjointes de fibres de p de dimension $k-1$ et donc irréductible. Le morphisme $\varphi_{1|Y_1}$ s'identifie finalement à la seconde projection de $Y_1 = \mathbf{P}^{k-1} \times \mathbf{P}^{k-1}$ sur $\mathbf{P}^{k-1}$ et W à la fibration $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^{k-1}}(\varphi_{1*}L)$ au dessus de $\mathbf{P}^{k-1}$. L'immersion fermée $Y_1 \subset W$ au dessus de $\mathbf{P}^{k-1}$ est donnée par le quotient inversible $p^*(\varphi_{1*}L) \twoheadrightarrow L_{|Y_1} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(1)$ et on a donc un morphisme surjectif $\varphi_{1*}L \twoheadrightarrow p_*(L_{|Y_1}) = H^0(\mathbf{P}^{k-1}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(1)$. Finalement $\varphi_{1*}L = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(a) \oplus H^0(\mathbf{P}^{k-1}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(1)$ avec $a \geq 1$. L'idéal de Y_1 dans W est $L^{\otimes -1} \otimes p^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(b)$ où b est un entier convenable. Le fibré canonique est donné par la formule $\omega_W = L^{-k-1} \otimes p^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(a) = L^{-k}(-Y)$ et l'idéal de Y dans W est donc $L^{\otimes -1} \otimes p^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(a)$. L'idéal du diviseur $\sum_{i \neq 1} Y_i$ dans W est donc $p^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(a-b)$. Or les diviseurs Y_1 et $\sum_{i \neq 1} Y_i$ sont disjoints et on a donc $a = b$ et $\sum_{i \neq 1} Y_i = \emptyset$. La première partie de la proposition est donc démontrée.

La seconde partie de la proposition a en fait déjà été prouvée ci-dessus. □

3. Démonstration du théorème

3.1. Fixons les notations. Soit (V, o) une singularité symplectique isolée de dimension $2n$ $(n > 1)$ vérifiant les hypothèses du théorème et soit $\pi : X \longrightarrow V$ l'éclatement normalisé de l'idéal maximal de o dans V. On peut toujours supposer qu'il existe une 2-forme symplectique φ sur $V - \{o\}$ restriction d'une 2-forme holomorphe sur X notée encore φ. Notons $E = E_1 \cup \cdots \cup E_l$ $(l \geq 2)$

le diviseur exceptionnel et $\mathrm{L} := \mathcal{O}_{\mathrm{X}}(-\mathrm{E})$. Le fibré $\mathrm{L}_{|\mathrm{E}}$ est ample et engendré par ses sections.

Proposition 3.2 (voir [Be00])**.** *L'ordre d'annulation de φ^n le long de E_i est $n-1$ pour $1 \leq i \leq l$.*

Démonstration. Notons k_i $(1 \leq i \leq l)$ l'ordre d'annulation de φ^n le long de E_i $(1 \leq i \leq l)$ de sorte que $\mathrm{div}(\varphi^n) = \sum_{i=1}^{l} k_i \mathrm{E}_i$.

Les singularités symplectiques sont rationnelles (*voir* [Be00], proposition 1.3) et ainsi $\varphi \in \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \Omega^2_{\mathrm{X}}(\log \mathrm{E})(-\mathrm{E}))$ (*voir* [CF01], théorème 2.1) où $\Omega^2_{\mathrm{X}}(\log \mathrm{E})$ est le faisceau des 2-formes différentielles méromorphe à pôles au pire logarithmiques le long de E. La $2n$-forme $\varphi^n \in \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \omega_{\mathrm{X}}(-(n-1)\mathrm{E}))$ est non nulle en dehors de E et il s'ensuit $k_i \geq n-1$ $(1 \leq i \leq l)$ puisque le diviseur E est contracté par π.

Le produit exterieur avec φ^{n-1} donne une application $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-linéaire $\Omega^1_{\mathrm{X}} \longrightarrow \mathrm{T}_{\mathrm{X}}(\sum_{i=1}^{l} k_i \mathrm{E}_i)$ qui est un isomorphisme en dehors de E. Notons $k_i - j_i \geq 0$ l'ordre d'annulation de cette application le long du diviseur E_i $(1 \leq i \leq l)$. On obtient une application $\lambda : \Omega^1_{\mathrm{X}} \longrightarrow \mathrm{T}_{\mathrm{X}}(\sum_{i=1} j_i \mathrm{E}_i)$ dont la restriction au diviseur E_i est non nulle et une section $\det(\lambda)$ de $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(2\sum_{i=1}^{l}(nj_i - k_i)\mathrm{E}_i)$ non nulle en dehors de E. On a donc $k_i \leq nj_i$ pour $1 \leq i \leq l$ puisque le diviseur E est contracté par π et en particulier $j_i \geq 1$.

Supposons par exemple $j_1 \geq j_i$ pour $1 \leq i \leq l$ et considérons le diagramme de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathrm{E}_1}(-\mathrm{E}_1) \arrow[r] & \Omega^1_{\mathrm{X}|\mathrm{E}_1} \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{|\mathrm{E}_1}"] & \Omega^1_{\mathrm{E}_1} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{T}_{\mathrm{E}_1}(\sum_{i=1}^{l} j_i \mathrm{E}_i) \arrow[r] & \mathrm{T}_{\mathrm{X}|\mathrm{E}_1}(\sum_{i=1}^{l} j_i \mathrm{E}_i) \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathrm{E}_1}((j_1+1)\mathrm{E}_1 + \sum_{i=2}^{l} j_i \mathrm{E}_i) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

On a $\mathrm{Hom}_{\mathrm{E}_1}(\mathcal{O}_{\mathrm{E}_1}(-\mathrm{E}_1), \mathcal{O}_{\mathrm{E}_1}((j_1+1)\mathrm{E}_1 + \sum_{i=2}^{l} j_i \mathrm{E}_i)) \subset \mathrm{H}^0(\mathrm{E}_1, \mathrm{L}_{|\mathrm{E}_1}^{-j_1-2}) = 0$ et, de même,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{E}_1}(\mathcal{O}_{\mathrm{E}_1}(-\mathrm{E}_1), \mathrm{T}_{\mathrm{E}_1}(\sum_{i=1}^{l} j_i \mathrm{E}_i)) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{E}_1}(\Omega^1_{\mathrm{E}_1}, \mathcal{O}_{\mathrm{E}_1}((j_1+1)\mathrm{E}_1 + \sum_{i=2}^{l} j_i \mathrm{E}_i)) \\
\subset \mathrm{H}^0(\mathrm{E}_1, \mathrm{T}_{\mathrm{E}_1} \otimes \mathrm{L}_{|\mathrm{E}_1}^{-j_1-1}) = 0
\end{aligned}$$

puisque $j_1 \geq 1$ (*voir* [Be00], lemme 3.3). L'application $\lambda_{|\mathrm{E}_1}$ se factorise à travers une flèche antisymétrique $\Omega^1_{\mathrm{E}_1} \xrightarrow{\mu_{\mathrm{E}_1}} \mathrm{T}_{\mathrm{E}_1}(\sum_{i=1}^{l} j_i \mathrm{E}_i)$ et provient donc d'un élément non nul de

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{E}_1, \overset{2}{\wedge}\mathrm{T}_{\mathrm{E}_1}(\sum_{i=1}^{l} j_i\mathrm{E}_i)) = \mathrm{H}^0(\mathrm{E}_1, \overset{2}{\wedge}\mathrm{T}_{\mathrm{E}_1} \otimes \mathrm{L}_{|\mathrm{E}_1}^{-j_1}(-\sum_{i=2}^{l}(j_1 - j_i)\mathrm{E}_i)).$$

Il s'ensuit $j_1 \leq 2$ (*voir* [Be00], lemme 3.3). Le diviseur E est connexe et l'ensemble $\{\mathrm{E}_{i_1}, \ldots, \mathrm{E}_{i_m}\}$ des diviseurs rencontrant E_1 et distincts de celui-ci est donc non vide. Si $j_1 = 2$ alors $j_{i_1} = \cdots = j_{i_m} = j_1 = 2$, $(\mathrm{E}_1, \mathrm{L}_{|\mathrm{E}_1}) \simeq (\mathbf{P}^{2n-1}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{2n-1}}(1))$ et $(\mathrm{E}_{i_r}, \mathrm{L}_{|\mathrm{E}_{i_r}}) \simeq (\mathbf{P}^{2n-1}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{2n-1}}(1))$ pour $1 \leq r \leq m$ (*voir* [Be00], lemme 3.3). Les fibrés $\mathcal{O}_{\mathrm{E}_1}(-\mathrm{E}_1) \simeq \mathrm{L}_{|\mathrm{E}_1}(\sum_{i=2}^{l} \mathrm{E}_i)$ et $\mathcal{O}_{\mathrm{E}_{i_1}}(\mathrm{E}_1)$ sont en particulier amples ce qui est absurde puisque $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_{i_1}$ est de dimension ≥ 1. Finalement $j_i = 1$ et $k_i \leq n$ pour $1 \leq i \leq l$. Si $k_1 = n$ alors $\det(\lambda_{|\mathrm{E}_1})$ est génériquement non nul puisque le diviseur E est contracté par π. Ceci est à nouveau exclu car $\lambda_{|\mathrm{E}_1}$ s'annule sur le sous-fibré $\mathcal{O}_{\mathrm{E}_1}(-\mathrm{E}_1) \subset \Omega^1_{\mathrm{X}|\mathrm{E}_1}$. Ceci démontre les égalités $k_i = n - 1$ pour $1 \leq i \leq l$. □

Lemme 3.3. *Le lieu exceptionnel* E *de* π *a exactement deux composantes irréductibles dont l'intersection est connexe.*

Démonstration. Le fibré canonique ω_{X} de X est isomorphe à $\mathrm{L}^{-(n-1)}$ par la proposition 3.2 et $\omega_{\mathrm{E}_i} \simeq \mathrm{L}_{|\mathrm{E}_i}^{-n}(-\sum_{j\neq i} \mathrm{E}_i \cap \mathrm{E}_i)$ par la formule d'adjonction. Si $l \geq 3$ alors il existe $i_1 \in \{1, \ldots, l\}$ tel que E_{i_1} rencontre au moins deux autres composantes irréductibles de E et E_{i_1} est de Fano avec $b_2(\mathrm{E}_{i_1}) = 1$ par la proposition 2.4. Notons $\{\mathrm{E}_{i_1}, \ldots, \mathrm{E}_{i_m}\}$ l'ensemble des composantes rencontrant E_{i_1} ($m \geq 3$). Le diviseur $\mathrm{E}_{i_1} \cap \mathrm{E}_{i_2} \subset \mathrm{E}_{i_1}$ est ample et en particulier connexe. Si $b_2(\mathrm{E}_{i_2}) = 1$ alors E_{i_2} est de Fano et le fibré $\mathcal{O}_X(\mathrm{E}_{i_1})_{|\mathrm{E}_{i_2}} \simeq \mathcal{O}_{\mathrm{E}_{i_2}}(\mathrm{E}_{i_1})$ et sa restriction à $\mathrm{E}_{i_1} \cap \mathrm{E}_{i_2}$ sont donc amples. Or le fibré $\mathcal{O}_X(-\mathrm{E}_{i_1})_{|\mathrm{E}_{i_1}} \simeq \mathcal{O}_{\mathrm{E}_{i_1}}(-\mathrm{E}_{i_1})$ est isomorphe au fibré $\mathrm{L}_{\mathrm{E}_{i_1}}(\sum_{j\neq i_1} \mathrm{E}_j)$ et sa restriction à $\mathrm{E}_{i_1} \cap \mathrm{E}_{i_2}$ est également ample, ce qui est absurde puisque $\mathrm{E}_{i_1} \cap \mathrm{E}_{i_2}$ est de dimension ≥ 1. Il existe donc un isomorphisme $(\mathrm{E}_{i_1} \cap \mathrm{E}_{i_2} \subset \mathrm{E}_{i_2}) \simeq (\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1} \subset \mathbf{P}_{\mathbf{P}^{n-1}}(\mathcal{E}_a))$ pour un entier $a \geq 0$ convenable (*voir* proposition 2.4). Le fibré $\mathcal{O}_{\mathrm{E}_{i_2}}(\mathrm{E}_{i_1})$ est isomorphe au fibré $\mathrm{L} \otimes p_a^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(-a-1)$ (*voir* proposition 2.4) et sa restriction à $\mathrm{E}_{i_1} \cap \mathrm{E}_{i_2} \simeq \mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ est isomorphe au fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(-a)$ qui n'est pas ample, ce qui est à nouveau absurde. La connexité de l'intersection des deux composantes irréductibles de E se démontre par des arguments analogues. □

3.4. Posons $i = i_2$ et $\mathcal{E} = \mathcal{E}_2$. Soit enfin $j := i \circ s$ où s est l'involution naturelle de $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$. Notons F et G les deux composantes irréductibles de E. Posons $\mathrm{W} := \mathrm{H}^0(\mathbf{P}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(1))$.

Proposition 3.5. *Le lieu exceptionnel* E *de* π *est isomorphe au recollement de deux copies de* $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^{n-1}}(\mathcal{E})$ *le long de* $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ *via les immersions fermées* i *et* j.

Démonstration. Notons $\mathrm{H} = \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$. La proposition 3.2 et la formule d'adjonction donnent $\omega_{\mathrm{F}} \simeq \mathrm{L}_{|\mathrm{F}}^{-n}(-\mathrm{H})$ et $\omega_{\mathrm{G}} \simeq \mathrm{L}_{|\mathrm{G}}^{-n}(-\mathrm{H})$. Si $b_2(\mathrm{H}) = 1$ alors F et G sont de Fano et $b_2(\mathrm{F}) = b_2(\mathrm{G}) = 1$ par la proposition 2.4. Les fibrés $\mathrm{L}_{|\mathrm{F}}$ et $\mathcal{O}_{\mathrm{F}}(\mathrm{G})$ sont amples et $\mathcal{O}_{\mathrm{F}}(-\mathrm{F})$ l'est donc également. Le fibré $\mathcal{O}_{\mathrm{G}}(\mathrm{F})$ est ample et $\mathrm{H} = \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ est de dimension au moins 1, ce qui est finalement absurde. On a donc $b_2(\mathrm{H}) \geq 2$ et H est isomorphe à $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ toujours par la proposition 2.4. Supposons F isomorphe à $\mathbf{P}^3$ ou Q_3 ($n = 2$). La restriction du fibré $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(-\mathrm{F}) = \mathrm{L} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{G})$ à $H = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ est en particulier ample et on a donc $b_2(\mathrm{G}) \geq 2$, puisque $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{F})_{|\mathrm{G}}$ est effectif et $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ est de dimension ≥ 1, et $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ est isomorphe à $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \subset \mathbf{P}_{\mathbf{P}^1}(\mathcal{E}_{a_{\mathrm{G}}})$. La restriction de $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(-\mathrm{F})$ à $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ est $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_{\mathrm{G}}) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1)$ ou $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_{\mathrm{G}})$ (*voir* proposition 2.4) qui n'est pas ample, ce qui est absurde.

Il existe ainsi un isomorphisme de $\mathrm{H} \subset \mathrm{F}$ (resp. $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$) sur $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1} \subset \mathbf{P}_{\mathbf{P}^{n-1}}(\mathcal{E}_{a_{\mathrm{F}}})$ (resp. $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1} \subset \mathbf{P}_{\mathbf{P}^{n-1}}(\mathcal{E}_{a_{\mathrm{G}}})$) tel que la restriction de L à F (resp. G) soit isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathrm{F}}(1) \otimes p_{\mathrm{F}}^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(1)$ (resp. $\mathcal{O}_{\mathrm{G}}(1) \otimes p_{\mathrm{G}}^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(1)$) où p_{F} (resp. p_{G}) est la projection de F (resp. G) sur $\mathbf{P}^{n-1}$. Enfin, $\mathcal{O}_{\mathrm{F}}(-\mathrm{H}) \simeq \mathrm{L}_{|\mathrm{F}}^{-1} \otimes p_{\mathrm{F}}^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(a_{\mathrm{F}} + 1))$ et $\mathcal{O}_{\mathrm{G}}(-\mathrm{H}) \simeq \mathrm{L}_{|\mathrm{G}}^{-1} \otimes p_{\mathrm{G}}^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(a_{\mathrm{G}} + 1))$.

Soit $\ell \subset \mathrm{H}$ une droite, i.e., $(\ell.\mathrm{L}) := \deg_\ell(\mathrm{L}_{|\ell}) = 1$, verticale pour p_{G}. Le fibré $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{F})_{|\mathrm{G}} \simeq \mathcal{O}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ est isomorphe à $\mathrm{L}_{|\mathrm{G}} \otimes p_{\mathrm{G}}^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(-a_{\mathrm{G}} - 1))$ et en particulier $(\ell.\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{F})) = 1$. La restriction de $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{F})$ à F est isomorphe à $\mathrm{L}_{|\mathrm{F}}^{-2} \otimes p_{\mathrm{F}}^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(a_{\mathrm{F}} + 1))$ et donc $(\ell.\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{F})) = -2 + (a_{\mathrm{F}} + 1)\deg_\ell(p_{\mathrm{F}}^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(1)_{|\ell}))$. La droite ℓ est donc horizontale pour p_{F} et la restriction de $p_{\mathrm{F}} \times p_{\mathrm{G}}$ à H est un isomorphisme de H sur $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$, autrement dit, les restrictions de p_{F} et p_{G} à H s'identifie aux deux projections de $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ sur $\mathbf{P}^{n-1}$ via les deux isomorphismes de H sur $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$. On a donc $\deg_\ell(p_{\mathrm{F}}^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(1)_{|\ell})) = 1$ et $a_{\mathrm{F}} = a_{\mathrm{G}} = 2$.

Le lieu exceptionnel E s'identifie donc au recollement de deux copies de $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^{n-1}}(\mathcal{E})$ le long de $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ et l'automorphisme de $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ induit par les deux isomorphismes de H sur $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ est de la forme $(x, y) \mapsto (\alpha(y),\, \beta(x))$ où α et β sont deux automorphismes de $\mathbf{P}^{n-1}$.

Il reste à vérifier que tout automorphisme de $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ de la forme $(x, y) \mapsto (\alpha(x),\, \beta(y))$ où α et β sont deux automorphismes de $\mathbf{P}^{n-1}$ est la restriction à $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ d'un automorphisme de $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^{n-1}}(\mathcal{E})$ stabilisant $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$.

Fixons un automorphisme β de $\mathbf{P}^{n-1}$ et notons encore β l'automorphisme linéaire de $\mathrm{W} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}$ correspondant. L'automorphisme de $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^{n-1}}(\mathcal{E})$ au dessus de $\mathbf{P}^{n-1}$ induit par $\mathrm{Id} \oplus \beta$ stabilise $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ et sa restriction à $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ est $(x, y) \mapsto (x,\, \beta(y))$. Soit α un automorphisme de $\mathbf{P}^{n-1}$. Fixons des isomorphismes $\alpha^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(2) \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(2)$ et $\alpha^*\mathrm{W} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}} \simeq \mathrm{W} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}$. L'isomorphisme $\alpha^*\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}$ déduit des deux précédents induit un automorphisme de $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^{n-1}}(\mathcal{E})$ au dessus de α qui stabilise $\mathbf{P}^{n-1}\times\mathbf{P}^{n-1}$ et sa restriction à $\mathbf{P}^{n-1}\times\mathbf{P}^{n-1}$ est de la forme $(x,y)\mapsto(\alpha(x),\ \beta'(y))$ où β' est un automorphisme de $\mathbf{P}^{n-1}$. $\square$

Lemme 3.6. *On a* $\mathrm{H}^1(\mathrm{F},\mathrm{T}_\mathrm{F}\otimes\mathcal{O}_\mathrm{F}(-\mathrm{F}))=\mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathrm{T}_\mathrm{G}\otimes\mathcal{O}_\mathrm{G}(-\mathrm{G}))=0$ *et* $\mathrm{H}^1(\mathrm{E},\mathrm{T}_\mathrm{X}\otimes\mathcal{O}_\mathrm{E}(-i\mathrm{E}))=0$ *pour tout* $i\geq 1$ *si* $n\geq 3$.

Démonstration. Les faisceaux $\mathrm{R}^j p_{\mathrm{F}*}(\mathcal{O}_\mathrm{F}(k))$ sont nuls pour $j\in\{1,2\}$ et $k\in\mathbf{Z}$. Il existe donc un isomorphisme $\mathrm{H}^i(\mathrm{F},\ \mathcal{O}_\mathrm{F}(k)\otimes p_\mathrm{F}^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(l))\simeq \mathrm{H}^i(\mathbf{P}^{n-1},\ \mathrm{S}^k(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(2)\oplus\mathrm{W}\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}})\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(l))$ pour $i\in\{1,2\}$ et $k,\ l\in\mathbf{Z}$. Le groupe $\mathrm{H}^i(\mathrm{F},\ \mathcal{O}_\mathrm{F}(k)\otimes p_\mathrm{F}^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(l))$ est donc nul pour $k,\ l\in\mathbf{Z}$ si $i=1$ et pour $l>-3$ si $i=2$. Les groupes $\mathrm{H}^1(\mathrm{F},\ p_\mathrm{F}^*(\mathrm{T}_{\mathbf{P}^{n-1}}(l))\otimes\mathcal{O}_\mathrm{F}(k))$ et $\mathrm{H}^1(\mathbf{P}^{n-1},\mathrm{T}_{\mathbf{P}^{n-1}}(l)\otimes\mathrm{S}^k(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(2)\oplus\mathrm{W}\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}))$ sont également isomorphes pour $k,\ l\in\mathbf{Z}$ et donc nuls pour $l>-3$.

La longue suite exacte de cohomologie déduite de la suite exacte courte

$$(0\longrightarrow\mathcal{O}_\mathrm{F}\longrightarrow p_\mathrm{F}^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(-2)\oplus\mathrm{W}^*\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}})\otimes\mathcal{O}_\mathrm{F}(1)\longrightarrow\mathrm{T}_{\mathrm{F}/\mathbf{P}^{n-1}}\longrightarrow 0)$$
$$\otimes\mathcal{O}_\mathrm{F}(k)\otimes p_\mathrm{F}^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(l)$$

et les annulations précédentes donnent l'annulation du groupe

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{F},\mathrm{T}_{\mathrm{F}/\mathbf{P}^{n-1}}\otimes\mathcal{O}_\mathrm{F}(k)\otimes p_\mathrm{F}^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(l))$$

pour $l>-3$ et, de même, la longue suite exacte de cohomologie déduite de la suite exacte courte

$$(0\longrightarrow\mathrm{T}_{\mathrm{F}/\mathbf{P}^{n-1}}\longrightarrow\mathrm{T}_\mathrm{F}\longrightarrow p_\mathrm{F}^*\mathrm{T}_{\mathbf{P}^{n-1}}\longrightarrow 0)\otimes\mathcal{O}_\mathrm{F}(k)\otimes p_\mathrm{F}^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(l)$$

donne finalement l'annulation du groupe $\mathrm{H}^1(\mathrm{F},\mathrm{T}_\mathrm{F}\otimes\mathcal{O}_\mathrm{F}(k)\otimes p_\mathrm{F}^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(l))$ pour $k+l>-3$. Le fibré $\mathcal{O}_\mathrm{F}(-\mathrm{F})$ est isomorphe au fibré $\mathcal{O}_\mathrm{F}(2)\otimes p_\mathrm{F}^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(-1)$ et les groupes $\mathrm{H}^1(\mathrm{F},\mathrm{T}_\mathrm{F}\otimes\mathcal{O}_\mathrm{F}(-\mathrm{F}))$ et $\mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathrm{T}_\mathrm{G}\otimes\mathcal{O}_\mathrm{G}(-\mathrm{G}))$ sont donc nuls.

La longue suite exacte de cohomologie déduite de la suite exacte courte

$$(0\longrightarrow\mathrm{T}_\mathrm{F}\longrightarrow\mathrm{T}_{\mathrm{X}|\mathrm{F}}\longrightarrow\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{X}}=\mathcal{O}_\mathrm{F}(-2)\otimes p_\mathrm{F}^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(1)\longrightarrow 0)$$
$$\otimes\mathcal{O}_\mathrm{F}(k)\otimes p_\mathrm{F}^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(l)$$

donne l'annulation de $\mathrm{H}^1(\mathrm{F},\mathrm{T}_{\mathrm{X}|\mathrm{F}}\otimes\mathcal{O}_\mathrm{F}(k)\otimes p_\mathrm{F}^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(l))$ pour $l>-3$. L'idéal de E dans X est $\mathrm{I}_\mathrm{F}\mathrm{I}_\mathrm{G}=\mathrm{I}_\mathrm{F}\cap\mathrm{I}_\mathrm{G}$ et la longue suite exacte de cohomologie déduite de la suite exacte courte

$$(0\longrightarrow\mathcal{O}_\mathrm{G}(-\mathrm{F})=\mathcal{O}_\mathrm{G}(-1)\otimes p_\mathrm{G}^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(2)\longrightarrow\mathcal{O}_\mathrm{E}\longrightarrow\mathcal{O}_\mathrm{F}\longrightarrow 0)$$
$$\otimes\mathrm{T}_{\mathrm{X}|\mathrm{E}}\otimes\mathcal{O}_\mathrm{E}(-k\mathrm{E})$$

donne finalement l'annulation du groupe $\mathrm{H}^1(\mathrm{E},\mathrm{T}_{\mathrm{X}|\mathrm{E}}\otimes\mathcal{O}_\mathrm{E}(-k\mathrm{E}))$ pour $k>-3$ et en particulier pour $k>0$. $\square$

3.7. Soit ζ une racine primitive cubique de l'unité et soit $\langle\zeta\rangle$ le groupe cyclique engendré par ζ. Notons $\mathrm{V}' = \mathbf{C}^{2n}/\langle\zeta\rangle$ où $\langle\zeta\rangle$ agit sur $\mathbf{C}^{2n}$ par la formule

$$\zeta.(z_1,\, z_2\,, \dots,\, z_{2n-1},\, z_{2n}) = (\zeta z_1,\, \zeta^2 z_2,\, \dots,\, \zeta z_{2n-1},\, \zeta^2 z_{2n})$$

et X' l'éclatement normalisé de l'idéal maximal de o' dans V' où o' est le point singulier de V'. Notons $\mathrm{E}' = \mathrm{F}' \cup \mathrm{G}'$ le diviseur exceptionnel et E_i (resp. E'_i) le $i^{\text{ième}}$ voisinage infinitésimal de E (resp. E') dans X (resp. X') pour $i \geq 1$. Notons F_i et G_i (resp. F'_i et G'_i) les $i^{\text{ièmes}}$ voisinages infinitésimaux de F et G (resp. F' et G') dans X (resp. X'). Fixons un isomorphisme $\psi_1 : \mathrm{E}_1 \simeq \mathrm{E}'_1$ (*voir* proposition 3.5) qui applique F (resp. G) sur F' (resp. G').

Proposition 3.8. *Il existe un isomorphisme* $\psi_2 : \mathrm{E}_2 \simeq \mathrm{E}'_2$ *compatible avec l'isomorphisme* $\psi_1 : \mathrm{E}_1 \simeq \mathrm{E}'_1$.

Démonstration. L'obstruction à l'existence d'un morphisme $\mathrm{E}_2 \longrightarrow \mathrm{X}'$ étendant le morphisme $\mathrm{E} \simeq \mathrm{E}' \hookrightarrow \mathrm{X}'$ est un élément de $\mathrm{H}^1(\mathrm{E}, \mathrm{T}_{\mathrm{X}'} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{E}}(-\mathrm{E})) = \mathrm{H}^1(\mathrm{E}', \mathrm{T}_{\mathrm{X}'} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{E}'}(-\mathrm{E}'))$ (voir [Gr71], Exposé 3, corollaire 5.2) nul par le lemme 3.6. Fixons un tel morphisme. Il se factorise à travers E'_2 et détermine un morphisme $\psi_2 : \mathrm{E}_2 \longrightarrow \mathrm{E}'_2$ et, par restriction à F_2 (resp. G_2), un morphisme $\psi_{\mathrm{F}_2} : \mathrm{F}_2 \longrightarrow \mathrm{F}'_2$ (resp. $\psi_{\mathrm{G}_2} : \mathrm{G}_2 \longrightarrow \mathrm{G}'_2$) étendant la restriction ψ_{F} (resp. ψ_{G}) de ψ à F (resp. G). Montrons que ψ_2 est en fait un isomorphisme.

L'obstruction à l'existence d'un morphisme $\mathrm{F}_2 \longrightarrow \mathrm{F}$ (resp. $\mathrm{F}'_2 \longrightarrow \mathrm{F}'$) étendant l'identité $\mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{F}$ (resp. $\mathrm{F}' \longrightarrow \mathrm{F}'$) est un élément de $\mathrm{H}^1(\mathrm{F}, \mathrm{T}_{\mathrm{F}} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{F}}(-\mathrm{F}))$ (resp. $\mathrm{H}^1(\mathrm{F}', \mathrm{T}_{\mathrm{F}'} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{F}'}(-\mathrm{F}'))$) nul par le lemme 3.6. Le schéma F_2 (resp. F'_2) est donc un F-schéma (resp. F'-schéma) dont le faisceau structural est isomorphe au quotient $S^\bullet(\mathcal{O}_{\mathrm{F}}(-\mathrm{F}))/\mathcal{O}_{\mathrm{F}}(-2\mathrm{F})S^\bullet(\mathcal{O}_{\mathrm{F}}(-\mathrm{F}))$ (resp. $S^\bullet(\mathcal{O}_{\mathrm{F}'}(-\mathrm{F}'))/\mathcal{O}_{\mathrm{F}'}(-2\mathrm{F}')S^\bullet(\mathcal{O}_{\mathrm{F}'}(-\mathrm{F}'))$). Les schémas F_2 et ${\mathrm{F}'}_2$ sont donc isomorphes.

Notons i et j les injections respectivement de $\mathcal{O}_{\mathrm{G}'}$ et $\mathcal{O}_{\mathrm{F}'}(-\mathrm{F}')$ dans $\mathcal{O}_{\mathrm{F}'} \oplus \mathcal{O}_{\mathrm{F}'}(-\mathrm{F}')$ et notons p et q les projections sur $\mathcal{O}_{\mathrm{F}'}$ et $\mathcal{O}_{\mathrm{F}'}(-\mathrm{F}')$ respectivement. Remarquons enfin l'égalité ${\psi_{\mathrm{F}_2}}_* \mathcal{O}_{\mathrm{F}_2} = {\psi_{\mathrm{F}}}_* \mathcal{O}_{\mathrm{F}} \oplus {\psi_{\mathrm{F}}}_* \mathcal{O}_{\mathrm{F}}(-\mathrm{F}) = \mathcal{O}_{\mathrm{F}'} \oplus \mathcal{O}_{\mathrm{F}'}(-\mathrm{F}')$. Le morphisme d'anneaux $\psi^*_{\mathrm{F}_2} : \mathcal{O}_{\mathrm{F}'} \oplus \mathcal{O}_{\mathrm{F}'}(-\mathrm{F}') \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{F}'} \oplus \mathcal{O}_{\mathrm{F}'}(-\mathrm{F}')$ est déterminé par la dérivation

$$\mathrm{D}_{\mathrm{F}} = q \circ \psi^*_{\mathrm{F}_2} \circ i \in \mathrm{Der}_{\mathbf{C}}(\mathcal{O}_{\mathrm{F}'},\, \mathcal{O}_{\mathrm{F}'}(-\mathrm{F}'))$$

et l'application $\mathcal{O}_{\mathrm{F}'}$-linéaire $p \circ \psi^*_{\mathrm{F}_2} \circ j \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{F}'}(\mathcal{O}_{\mathrm{F}'}(-\mathrm{F}'),\, \mathcal{O}_{\mathrm{F}'}(-\mathrm{F}')) = \mathbf{C}$. Nous noterons λ_{F} l'élément de $\mathbf{C}$ correspondant à $p \circ \psi^*_{\mathrm{F}_2} \circ i$. Notons enfin $\mathrm{D}_{\mathrm{G}} \in \mathrm{Der}_{\mathbf{C}}(\mathcal{O}_{\mathrm{G}'},\, \mathcal{O}_{\mathrm{G}'}(-\mathrm{G}'))$ et $\lambda_{\mathrm{G}} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}'}(\mathcal{O}_{\mathrm{G}'}(-\mathrm{G}'),\, \mathcal{O}_{\mathrm{G}'}(-\mathrm{G}'))$ les éléments correspondants associés à ψ_{G_2}.

Le morphisme ψ_{F_2} est un homéomorphisme et si $\lambda_{\mathrm{F}} \neq 0$ alors c'est un isomorphisme de schémas. Supposons donc $\lambda_{\mathrm{F}} \neq 0$ et vérifions que ψ_{F_2} induit un isomorphisme de $\mathrm{F}_2 \cap \mathrm{G}_2$ sur $\mathrm{F}'_2 \cap \mathrm{G}'_2$. Soit $\mathrm{U} \subset \mathrm{F}'$ un ouvert affine non vide d'anneau A au dessus duquel le fibré $\mathcal{O}_{\mathrm{F}'}(-\mathrm{F}')$ est trivial. Les anneaux $\mathcal{O}_{\mathrm{F}_2}(\mathrm{U})$ et $\mathcal{O}_{\mathrm{F}'_2}(\mathrm{U})$ sont isomorphes à l'anneau $A \oplus \varepsilon A$ avec $\varepsilon^2 = 0$. Le morphisme $\psi^*_{\mathrm{F}_2}$ est $a + \varepsilon b \mapsto a + \varepsilon(\mathrm{D}_{\mathrm{F}}(a) + \lambda_{\mathrm{F}} b)$. Soit $h + \varepsilon h_1$ un générateur de l'idéal de $\mathrm{F}'_2 \cap \mathrm{G}'_2$ dans F'_2 sur U. L'élément h est une équation du diviseur $\mathrm{F}' \cap \mathrm{G}'_2$ dans F'. La restriction de ψ_2 à $\mathrm{F}_2 \cap \mathrm{G}_2$ se factorise à travers $\mathrm{F}'_2 \cap \mathrm{G}'_2$ et l'élément $\psi^*_{\mathrm{F}_2}(h + \varepsilon h_1)$ est donc dans l'idéal de $\mathrm{F}_2 \cap \mathrm{G}_2$ dans F_2. Ce dernier est engendré par un élément de la forme $uh + \varepsilon h_3$ où u est inversible dans A. Ecrivons $\psi^*_{\mathrm{F}_2}(h + \varepsilon h_1) = h + \varepsilon h_2$ avec $h_2 = \mathrm{D}_{\mathrm{F}}(h) + \lambda_{\mathrm{F}} h_1$. Il existe donc une relation $h + \varepsilon h_2 = (a + \varepsilon b)(uh + \varepsilon h_3) = auh + \varepsilon(ah_3 + buh)$ et en particulier $h = auh$. L'élément a est inversible dans A et $a + \varepsilon b$ est donc inversible dans $A \oplus \varepsilon A$. L'image par $\psi^*_{\mathrm{F}_2}$ de l'idéal de $A \oplus \varepsilon A$ engendré par $h + \varepsilon h_1$ est l'idéal—$\psi^*_{\mathrm{F}_2}$ est un isomorphisme—engendré par $\psi^*_{\mathrm{F}_2}(h + \varepsilon h_1)$ et donc l'idéal de $\mathrm{F}_2 \cap \mathrm{G}_2$ dans F_2.

Si $\lambda_{\mathrm{F}} = 0$ alors le morphisme ψ_{F_2} se factorise à travers $\mathrm{F}' \hookrightarrow \mathrm{F}'_2$. L'image schématique de $\mathrm{F}_2 \cap \mathrm{G}_2$ est en particulier un sous-schéma fermé de F' et le morphisme induit par ψ_2 de $\mathrm{F}_2 \cap \mathrm{G}_2$ vers $\mathrm{F}'_2 \cap \mathrm{G}'_2$ n'est pas un isomorphisme.

En particulier, si $\lambda_{\mathrm{F}} = 0$ alors $\lambda_{\mathrm{G}} = 0$ et l'image schématique de $\mathrm{F}_2 \cap \mathrm{G}_2$ est donc le sous-schéma fermé $\mathrm{F}' \cap \mathrm{G}'$, autrement dit, il existe une rétraction de l'inclusion $\mathrm{E} \subset \mathrm{E}_2$, ce qui est exclu par le lemme 3.9.

On a donc finalement $\lambda_{\mathrm{F}} \neq 0$, $\lambda_{\mathrm{G}} \neq 0$ et ψ_2 est bien l'isomorphisme cherché. □

Lemme 3.9 (voir [De01], lemme 2.8)**.** *Soit* $(\mathrm{R}, \mathfrak{m})$ *un anneau local noethérien et soit* $\mathrm{I} \subset \mathfrak{m}^2$ *un idéal de* R. *S'il existe une section de la projection canonique* $\mathrm{R} \twoheadrightarrow \mathrm{R}/\mathrm{I}$ *alors* $\mathrm{I} = 0$.

Le lemme suivant et le lemme 3.6 nous assurent que l'isomorphisme ψ_2 s'étend en un isomorphisme $\widehat{\mathrm{X}} \simeq \widehat{\mathrm{X}}'$ des complétés formels de X et X′ le long de E et E′ respectivement. Les complétés $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{V},\mathrm{o}}$ et $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{V}',\mathrm{o}'}$ sont donc isomorphes (*voir* [Gr66], Chap. III, théorème 4.1.5). Le théorème d'approximation d'Artin (*voir* [Ar68], corollaire 1.6) termine la preuve du théorème.

Lemme 3.10 (voir [Mo82], Lemme 3.33)**.** *Soient* X *et* X′ *deux espaces analytiques complexes réduits et irréductibles de même dimension et* E *et* E′ *deux diviseurs de Cartier effectifs sur* X *et* X′ *respectivement. Notons* E_i *(resp.* E'_i*) le* $i^{\text{ième}}$ *voisinage infinitésimal de* E *(resp.* E′*) dans* X *(resp.* X′*) pour* $i \geq 1$. *On suppose que* X *est lisse et qu'il existe un isomorphisme* $\mathrm{E}_{i_0} \simeq \mathrm{E}'_{i_0}$ *pour un* $i_0 \geq 2$. *Si* $\mathrm{H}^1(\mathrm{E}, \mathrm{T}_{\mathrm{X}} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{E}}(-i\mathrm{E})) = 0$ *pour* $i \geq i_0$ *alors l'isomorphisme* $\mathrm{E}_{i_0} \simeq \mathrm{E}'_{i_0}$ *s'étend en un isomorphisme* $\widehat{\mathrm{X}} \simeq \widehat{\mathrm{X}}'$ *des complétés formels de* X *et* X′ *le long de* E *et* E′ *respectivement.*

Remerciements

Je tiens à exprimer ici mes remerciements à Arnaud Beauville pour toute l'aide qu'il m'a apportée.

References

[Ar68] M. Artin, *On the solutions of analytic equations*, Invent. Math. **5** (1968), 277-291.

[Be00] A. Beauville, *Symplectic singularities*, Invent. Math. **139** (2000), 541-549.

[CF01] F. Campana, H. Flenner, *Contact singularities* à paraître dans Manuscripta Math. **108** (2002), 529–541.

[De01] O. Debarre, *Higher-dimensional algebraic geometry*, Universitext, Springer-Verlag, 2001.

[Fl88] H. Flenner, *Extendability of differential forms on non-isolated singularities*, Invent. Math. **94** (1988), 317-326.

[Fu87] T. Fujita, *On polarized manifolds whose adjoint bundles are not semipositive*, *Algebraic geometry, Sendai 1985*, Adv. Stud. Pure Math. 10, 167-178, 1987.

[Gr66] A. Grothendieck, *Eléments de géométrie algébrique III*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 11, 1966.

[Gr71] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture Notes in Math. 224, Springer-Verlag, 1971.

[KO73] S. Kobayashi, T. Ochiai, *Characterization of complex projective spaces and hyperquadrics*, J. Math. Kyoto Univ. **13** (1973), 31-47.

[Mo82] S. Mori, *Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective*, Ann. of Math. **116** (1982), 133-176.

[Od88] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry* 15, Springer-Verlag, 1988.

[Wi89] J. Wisniewski, *Length of extremal rays and generalized adjonction*, Math. Z. **200** (1989), 409-427.

[Wi90] J. Wisniewski, *On a conjecture of Mukai*, Manuscripta Math. **68** (1990), 135-141.

[Wi91] J. Wisniewski, *On contractions of extremal rays on Fano manifolds*, J. Reine Angew. Math. **417** (1991), 141-157.

Institut Fourier, UMR 5582 du CNRS, Université Joseph Fourier, BP 74, 38402 Saint Martin d'Hères, France

E-mail address: druel@mozart.ujf-grenoble.fr