

Stéphane Druel

Caractérisation de l'espace projectif

Received: 3 September 2003 / Revised version: 4 May 2004

Published online: 10 August 2004

Introduction

Soient Y une variété projective normale, définie sur un corps algébriquement clos, et M un fibré en droites ample sur Y . Soient $Z := \mathbf{P}_Y(\mathcal{O}_Y \oplus M^{-1})$ et $\mathcal{O}_Z(1)$ le fibré tautologique sur Z . Le système linéaire $|\mathcal{O}_Z(n) \otimes M^n|$ est sans points bases pour $n \gg 0$. Le morphisme associé est la *contraction* de la section de fibré normal M^{-1} de $Z \rightarrow Y$.

Soit X une variété projective normale, de dimension $n \geq 2$, définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Un *feuilletage en courbes* sur X est la donnée d'un fibré en droites L sur X et d'une application non nulle $\eta : \Omega_X^1 \rightarrow L^{-1}$.

Rappelons le résultat de Wahl (voir [Wa83]). Si L est ample alors $L \simeq \mathcal{O}_X(Y)$, où $Y \subset X$ est un diviseur intègre et normal, et X s'identifie à la contraction de la section de $\mathbf{P}_Y(\mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y(-Y)) \rightarrow Y$ de fibré normal $\mathcal{O}_Y(-Y)$ (voir [Wa83], Theorem 2). Si, de plus, X est lisse alors X est isomorphe à l'espace projectif \mathbf{P}^n (voir [Wa83], Theorem 1).

Nous donnons une démonstration nouvelle, de nature géométrique, des résultats de Wahl et d'un énoncé plus général.

Le *lieu singulier* du feuilletage (η, L) est le sous-schéma fermé $Z(\eta, L)$ de X dont l'idéal est l'image de l'application induite $\Omega_X^1 \otimes L \rightarrow \mathcal{O}_X$. Une courbe $C \subset X$, irréductible et réduite, est appelée une *feuille* si $C \not\subset Z(\eta, L)$ et si la restriction $\eta|_C$ de η à C se factorise à travers l'application naturelle $\Omega_{X|C}^1 \rightarrow \Omega_C^1$.

Théorème. – Soient X une variété projective normale, de dimension ≥ 2 , définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, non dénombrable, et (η, L) un feuilletage en courbes sur X . Si $L \cdot C > 0$ pour toute courbe $C \subset X$ et si $Z(\eta, L) \neq \emptyset$ alors $L \simeq \mathcal{O}_X(Y)$, où $Y \subset X$ est un diviseur intègre et normal, et X s'identifie à la contraction de la section du morphisme $\mathbf{P}_Y(\mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y(-Y)) \rightarrow Y$ de fibré normal $\mathcal{O}_Y(-Y)$. Les feuilles de (η, L) sont alors les images dans X des fibres du morphisme précédent.

La preuve de ce résultat repose sur un critère d'algébricité des feuilles d'un feuilletage algébrique démontré de manière indépendante par Bost (voir [Bo01], Theorem 3.5) et Bogomolov-McQuillan (voir [BoMc01]) : si $Z(\eta, L) \neq \emptyset$, alors

S. Druel: Institut Fourier, UMR 5582 du CNRS, Université Joseph Fourier, BP 74, 38402 Saint Martin d'Hères, France. e-mail: druel@ujf-grenoble.fr

$Z(\eta, L)_{\text{red}}$ est un point et les feuilles du feuilletage (η, L) sont des courbes rationnelles passant par ce point.

Corollaire.— Soient X une variété projective lisse de dimension $n \geq 2$, définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, non dénombrable, et (η, L) un feuilletage en courbes sur X . Si $L \cdot C > 0$ pour toute courbe $C \subset X$, alors ou bien $Z(\eta, L) = \emptyset$ et X possède une fibration en droites projectives $X \rightarrow Y$, ou bien $Z(\eta, L) \neq \emptyset$ et X est isomorphe à l'espace projectif \mathbf{P}^n . Dans le premier cas, le feuilletage (η, L) est le feuilletage naturel $\Omega_X^1 \rightarrow \Omega_{X/Y}^1$ dont les feuilles sont les fibres du morphisme $X \rightarrow Y$. Dans le second cas, les feuilles de (η, L) sont les droites de \mathbf{P}^n passant par un point, le lieu singulier $Z(\eta, L)$ du feuilletage, et L est isomorphe au fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$.

Le dernier résultat est la proposition suivante.

Proposition.— Soient X une surface projective normale, définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, non dénombrable, et (η, L) un feuilletage en courbes sur X . Si $L \cdot C > 0$ pour toute courbe $C \subset X$, alors ou bien $Z(\eta, L) = \emptyset$ et X est une surface géométriquement réglée, ou bien $Z(\eta, L) \neq \emptyset$ et X vérifie les conclusions du théorème.

1 Feuilletage

(1.1). Soient X une variété algébrique définie sur un corps k , lisse sur k et (η, L) un feuilletage en courbes sur X . Soit $\eta^* : L \rightarrow T_X$ l'application duale de η . Soit $C \subset X$ une courbe irréductible et réduite, $C \not\subset Z(\eta, L)$. La courbe C est une feuille du feuilletage (η, L) si et seulement si pour $x \in C$ un point général, les sous-espaces vectoriels $T_{C,x}$ et $L \otimes k(x)$ de $T_{X,x}$ sont égaux, où l'on a identifié $L \otimes k(x)$ avec son image dans $T_{X,x}$ via $\eta^* \otimes k(x)$. Les notions de feuilletage et de feuilles introduites plus haut sont donc les notions bien connues lorsque X est lisse sur k .

Lemme 1.2. Soient X une variété algébrique définie sur un corps k de caractéristique nulle et (η, L) un feuilletage en courbes sur X . Soit enfin $n : X^n \rightarrow X$ la normalisation de X . Il existe alors une unique application $\eta_n : \Omega_{X^n}^1 \rightarrow n^*L^{-1}$ étendant $n^*\eta : n^*\Omega_X^1 \rightarrow n^*L^{-1}$ et, de plus, $n^{-1}(Z(\eta, L)_{\text{red}}) = Z(\eta_n, n^*L)_{\text{red}}$.

Démonstration.— $\text{Spec}(A) \subset X$ un ouvert affine au dessus duquel le fibré L est trivial. Soit K le corps des fractions de A et \bar{A} la clôture intégrale de A dans K . Soit D_A la dérivation de A définissant le feuilletage sur l'ouvert considéré et soit D_K la dérivation de K correspondante. La dérivation D_K satisfait $D_K(\bar{A}) \subset \bar{A}$ (voir [Se66]) et c'est l'unique dérivation de \bar{A} induisant D_A sur A . La première assertion du lemme est alors immédiate.

Soit I l'idéal de $Z(\eta, L) \cap \text{Spec}(A)$ dans A , et soit $\mathfrak{m} \supset I$ un idéal maximal. Soit $J := \mathfrak{m}\bar{A}$. Comme $D_A(A) \subset I \subset \mathfrak{m}$, on a $D_K(J) \subset J$ et, puisque k est de caractéristique nulle, $D_K(\sqrt{J}) \subset \sqrt{J}$. La dérivation D_K induit donc une dérivation

de l'anneau \bar{A}/\sqrt{J} . Le schéma $\text{Spec}(\bar{A}/\sqrt{J})$ est lisse sur k , de dimension 0. La dérivation précédente est donc identiquement nulle et $D_K(\bar{A}) \subset \sqrt{J}$. Ceci démontre l'inclusion $n^{-1}(Z(\eta, L)_{\text{red}}) \subset Z(\eta_n, n^*L)_{\text{red}}$.

Inversement, soit $\bar{m} \subset \bar{A}$ un idéal maximal tel que $D_K(\bar{A}) \subset \bar{m}$. Alors $D_K(A) = D_A(A) \subset A \cap \bar{m}$. Ceci démontre l'inclusion $Z(\eta_n, n^*L)_{\text{red}} \subset n^{-1}(Z(\eta, L)_{\text{red}})$ \square

Corollaire 1.3. *Soient X une variété algébrique définie sur un corps k de caractéristique nulle et (η, L) un feuilletage en courbes sur X . Soit $C \subset X$ une courbe projective, irréductible et réduite. Notons $g(C)$ le genre géométrique de C . Si C est une feuille de (η, L) alors $2g(C) - 2 + L \cdot C \leq 0$.*

Démonstration. – La restriction $\eta|_C$ de η à C se factorise à travers l'application naturelle $\Omega_{X|C}^1 \rightarrow \Omega_C^1$. Notons $\eta_C : \Omega_C^1 \rightarrow L|_C^{-1}$, l'application obtenue. Puisque $C \not\subset Z(\eta, L)$, η_C n'est pas identiquement nulle. Soit $n : C^n \rightarrow C$ la normalisation de C . D'après le lemme précédent, il existe une unique application, non nulle, $\eta_{C^n} : \Omega_{C^n}^1 \rightarrow n^*L|_C^{-1}$ étendant $n^*\eta_C : n^*\Omega_C^1 \rightarrow n^*L|_C^{-1}$. L'application η_{C^n} étant injective,

$$2g(C) - 2 = \deg(\Omega_{C^n}^1) \leq \deg(n^*L|_C^{-1}) = -L \cdot C. \quad \square$$

Exemple 1.4. *Si le corps de base est C et si B est une courbe projective, lisse, de genre au moins 2, il existe un fibré vectoriel G de rang 2 et de degré 0 sur B dont toutes les puissances symétriques sont stables. Soit $S = \mathbf{P}_B(G)$ la surface réglée associée. Le fibré tangent relatif $T_{S/B} \subset T_S$ est alors de degré > 0 sur toutes les courbes de S (voir [Ha70], Exemple 10.6).*

2. Feuilletage sur les surfaces

Le résultat de cette section est la proposition suivante. Les variétés et les morphismes considérés sont définis sur un corps algébriquement clos fixé.

Proposition 2.1. *Soient S une surface normale, B une courbe projective lisse de genre $g(B) \geq 1$ et $p_S : S \rightarrow B$ un morphisme à fibres connexes. Soit F une fibre générale de p_S . Soient S' une surface algébrique et $q_S : S \rightarrow S'$ un morphisme dominant. Soit (η_S, L_S) un feuilletage en courbes sur S . Supposons le fibré L_S numériquement effectif et supposons qu'une courbe $C \subset S$ est contractée par q_S si et seulement si $L_S \cdot C = 0$. Supposons enfin que les courbes tracées sur S et contractées par q_S sont horizontales relativement à p_S . Sous ces hypothèses, la surface $S \rightarrow B$ est géométriquement réglée, le feuilletage vertical et $L_S \cdot F \in \{1, 2\}$. Si $L_S \cdot F = 2$ alors le feuilletage est régulier et le morphisme q_S fini. Si $L_S \cdot F = 1$, alors le lieu singulier du feuilletage est l'unique section de p_S contractée par q_S .*

Démonstration. – L'application composée

$$N_{F/S}^* \simeq \mathcal{O}_F \rightarrow \Omega_{S|F}^1 \rightarrow (L_S^{-1})|_F$$

est identiquement nulle car $L_S \cdot F > 0$ et il existe donc une factorisation $\Omega_F^1 \longrightarrow (L_S^{-1})|_F$. Les fibres générales de p_S sont donc des courbes rationnelles lisses et $L_S \cdot F \in \{1, 2\}$.

1^{er} cas : $L_S \cdot F = 1$.—Les fibres de p_S sont irréductibles et génériquement réduites. La surface $S \longrightarrow B$ est donc géométriquement réglée.

Soit G un fibré de rang 2 sur B , *normalisé*, de sorte que $S = \mathbf{P}_B(G)$ (voir [Ha77]). Notons $C_0 \subset S$ une section de p_S telle que $\mathcal{O}_S(C_0)$ soit isomorphe au fibré tautologique $\mathcal{O}_S(1)$. Le groupe $\text{Num}(S)$ est libre de rang 2 et engendré par les classes de C_0 et F . Le produit d'intersection est donné par les formules $F^2 = 0$, $C_0 \cdot F = 1$ et $C_0^2 = -e = \text{deg}(G)$.

L'application composée

$$p_S^* \Omega_B^1 \xrightarrow{dp_S} \Omega_S^1 \xrightarrow{\eta_S} L_S^{-1}$$

est nulle sur les fibres générales de p_S et donc identiquement nulle. Le feuilletage (η_S, L_S) est donc vertical relativement à p_S , autrement dit, il existe une factorisation

$$\begin{array}{ccc} \Omega_S^1 & \longrightarrow & \Omega_{S/B}^1 \\ \downarrow \eta_S & & \swarrow \\ L_S^{-1} & & \end{array}$$

ou encore, des inclusions $L_S \subset T_{S/B} \subset T_S$. Il existe donc un diviseur effectif $D_S \subset S$ tel que $T_{S/B} = L_S(D_S)$ et $D_S \cdot F = 1$.

Soit $C_0 + bF$ la classe de D_S dans $\text{Num}(S)$. La classe de L_S dans $\text{Num}(S)$ est donc $C_0 + (e - b)F$ et

$$L_S \cdot D_S = (C_0 + (e - b)F) \cdot (C_0 + bF) = -e + b + (e - b) = 0.$$

Si D_S^h est la composante horizontale de D_S et D_S^v sa composante verticale, alors

$$0 = L_S \cdot D_S = L_S \cdot D_S^h + L_S \cdot D_S^v$$

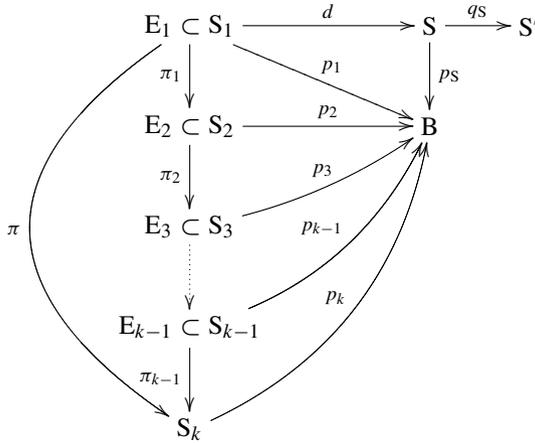
et, puisque L_S est numériquement effectif,

$$L_S \cdot D_S^h = L_S \cdot D_S^v = 0.$$

Le fibré L_S étant de degré > 0 sur les fibres de p_S , le diviseur D_S^v est nul. Le lieu singulier D_S du feuilletage (η_S, L_S) est donc une section de p_S contractée par q_S . L'unicité d'une telle section est bien connue.

2^{ème} cas : $L_S \cdot F = 2$.—Il existe une résolution *minimale* et *équivariante* $d : S_1 \longrightarrow S$ des singularités de S (voir [BuWa74], Proposition 1.2). Notons $\eta_1 : \Omega_{S_1}^1 \longrightarrow d^* L_S^{-1}$ le relèvement de $\eta_S : \Omega_S^1 \longrightarrow L_S^{-1}$ à S_1 .

Le genre de B est ≥ 1 et il n'y a donc pas de (-1) -courbe sur S_1 dominant B . Supposons que la surface S_1 ne soit pas minimale. Son modèle minimal est une surface géométriquement réglée S_k et s'obtient à partir de S_1 en contractant des (-1) -courbes dans les fibres de p_1



Le morphisme π_i est l'éclatement d'un point de S_{i+1} , de lieu exceptionnel $E_i \subset S_i$. Notons $L_1 = d^*L_S$. Le fibré L_1 est numériquement effectif et $L_1 \cdot F = L_S \cdot F = 2$. Il existe un fibré L_2 sur S_2 et un entier $j_1 \in \mathbf{Z}$ tels que $L_1 = \pi_1^*L_2(j_1E_1)$. Comme L_1 est numériquement effectif, $j_1 \leq 0$ et L_2 est également numériquement effectif. L'inclusion $T_{S_1} \rightarrow \pi_1^*T_{S_2}$ donne les inclusions

$$0 \rightarrow T_{S_1} \otimes L_1^{-1} \rightarrow \pi_1^*(T_{S_2} \otimes L_2^{-1})(-j_1E_1)$$

et

$$0 \rightarrow \pi_{1*}(T_{S_1} \otimes L_1^{-1}) \rightarrow T_{S_2} \otimes L_2^{-1}$$

puisque $\pi_{1*}\mathcal{O}_{S_1}(-j_1E_1) = \mathcal{O}_{S_2}$. En particulier, $H^0(S_1, T_{S_1} \otimes L_1^{-1}) \subset H^0(S_2, T_{S_2} \otimes L_2^{-1})$. L'argument précédent montre qu'il existe, pour tout $2 \leq i \leq k$, des fibrés numériquement effectifs L_i sur S_i et des entiers $j_i \leq 0$ tels que

$$L_i = \pi^*L_{i+1}(j_iE_i)$$

et

$$H^0(S_{i-1}, T_{S_{i-1}} \otimes L_{i-1}^{-1}) \subset H^0(S_i, T_{S_i} \otimes L_i^{-1}).$$

D'où

$$L_1 = \pi^*L_k(-E)$$

où E est un diviseur effectif et π -exceptionnel. Soit enfin η_k l'image de $\eta_1 \in H^0(S_1, T_{S_1} \otimes L_1^{-1})$ dans $H^0(S_k, T_{S_k} \otimes L_k^{-1})$.

Soit G un fibré de rang 2 sur B , *normalisé*, de sorte que $S_k = \mathbf{P}_B(G)$. Notons $C_0 \subset S_k$ une section de p_k telle que $\mathcal{O}_{S_k}(C_0)$ soit isomorphe au fibré tautologique $\mathcal{O}_{S_k}(1)$. Soit $e = -\deg(G)$.

L'application composée

$$p_k^*\Omega_B^1 \xrightarrow{dp_k} \Omega_{S_k}^1 \xrightarrow{\eta_k} L_k^{-1}$$

est nulle sur les fibres générales de p_k et donc identiquement nulle. Le feuilletage (η_k, L_k) est donc vertical relativement à p_k , autrement dit, il existe une factorisation

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega_{S_k}^1 & \longrightarrow & \Omega_{S_k/B}^1 \\
 \downarrow \eta_k & & \swarrow \\
 L_k^{-1} & &
 \end{array}$$

ou encore, des inclusions $L_k \subset T_{S_k/B} \subset T_{S_k}$. Il existe donc un diviseur effectif $D_k \subset S_k$ tel que $T_{S_k/B} = L_k(D_k)$. Enfin, $L_k \cdot F = 2$.

Le fibré tangent relatif $T_{S_k/B}$ est de degré 2 sur la fibre F et D_k est donc vertical relativement à p_k . La classe de $T_{S_k/B}$ dans $\text{Num}(S_k)$ est $2C_0 + eF$ et la classe de L_k est donc $2C_0 + (e - \alpha)F$ où $\alpha = D_k \cdot C_0 \geq 0$. Le nombre $L_k^2 = -4\alpha$ est donc ≤ 0 d'une part et ≥ 0 d'autre part puisque L_k est numériquement effectif, et donc nul. D'où

$$D_k = 0 \text{ et } L_k \equiv 2C_0 + eF.$$

La relation $L_1 = \pi^*L_k(-E)$ donne $L_1^2 = L_k^2 + E^2 = E^2$. Le premier de ces deux nombres est ≥ 0 puisque L_1 est numériquement effectif et le second est ≤ 0 puisque E est π -exceptionnel. D'où

$$E = 0 \text{ et } L_1 \cdot E_1 = \pi^*L_k \cdot E_1 = 0.$$

La (-1) -courbe E_1 est donc contractée par $q_S \circ d$ mais ne l'est pas par d , par minimalité de la résolution $d : S_1 \rightarrow S$. La courbe $d(E_1)$ n'est pas contractée par q_S car elle est verticale relativement à p_1 . La surface S_1 est donc minimale et, par ce qui précède, L_1 est isomorphe au fibré tangent relatif $T_{S_1/B}$.

Supposons qu'il existe une courbe irréductible $C \subset S_1$ qui soit contractée par $q_S \circ d$. Soit $aC_0 + bF$ sa classe dans $\text{Num}(S_1)$,

$$L_1 \cdot C = 2b - ae \text{ et } C^2 = a(2b - ae).$$

Le premier de ces deux nombres doit être nul si C est contractée par $q_S \circ d$ et le second strictement négatif, ce qui est absurde. La surface S est donc lisse, et le morphisme q_S est fini. Enfin, le feuilletage (η_S, L_S) sur S est régulier. \square

3 Fibrés projectifs

(3.1). Soit Y une variété algébrique définie sur un corps algébriquement clos. Soit G un fibré vectoriel de rang 2 sur Y , extension d'un fibré en droites M par le fibré trivial \mathcal{O}_Y ,

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow G \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Soit α la classe dans $H^1(\Sigma, M^{-1})$ de cette extension. Soient $Z := \mathbf{P}(G)$ et $p : Z \rightarrow Y$ le morphisme naturel. Soit Σ la section de p correspondant au quotient inversible M de G . L'idéal de Σ dans Z s'identifie au fibré $\mathcal{O}_Z(-1)$.

Soit 2Σ le deuxième voisinage infinitésimal de Σ dans Z , c'est-à-dire, le sous-schéma fermé de Z défini par l'idéal $\mathcal{I}_{2\Sigma/Z}^2$.

Lemme 3.2. *Il existe un isomorphisme $\text{Pic}(2\Sigma) \simeq \text{Pic}(\Sigma) \oplus H^1(\Sigma, M^{-1})$.*

Démonstration. – Le morphisme p induit une rétraction de l'inclusion $\Sigma \subset 2\Sigma$. La suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M^{-1} \simeq I_{\Sigma/Z}/I_{\Sigma/Z}^2 \longrightarrow \mathcal{O}_{2\Sigma}^\times \longrightarrow \mathcal{O}_\Sigma^\times \longrightarrow 0$$

donne la suite exacte de cohomologie

$$0 \longrightarrow H^1(\Sigma, M^{-1}) \longrightarrow H^1(\Sigma, \mathcal{O}_{2\Sigma}^\times) \longrightarrow H^1(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma^\times).$$

La rétraction $2\Sigma \longrightarrow \Sigma$ induit en cohomologie une section de $H^1(\Sigma, \mathcal{O}_{2\Sigma}^\times) \longrightarrow H^1(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma^\times)$ et, finalement,

$$\text{Pic}(2\Sigma) \simeq \text{Pic}(\Sigma) \oplus H^1(\Sigma, M^{-1}). \quad \square$$

Le point suivant a été observé par Schröer.

Lemme 3.3 (voir [Sc00], Exemple 5.6). *La classe du fibré $\mathcal{O}_Z(1) \otimes p^*M^{-1}$ dans $\text{Pic}(2\Sigma)$ est $(0, \alpha)$.*

Démonstration. – La classe du fibré $\mathcal{O}_Z(1) \otimes p^*M^{-1}$ dans $\text{Pic}(\Sigma)$ est nulle. Soit U_i un recouvrement par des ouverts affines de $\Sigma \simeq Y$ trivialisant le fibré M . Soit M_i la restriction de M à U_i et $s_i \in H^0(U_i, M_i)$ une section partout non nulle. Soient $\psi_i : M_i \longrightarrow \mathcal{O}_i$ la trivialisatoin de M_i induite par s_i et $f_{ij} = \psi_i \circ \psi_j^{-1}$ les fonctions de transitions du fibré M sur les ouverts $U_{ij} := U_i \cap U_j$. Soit G_i la restriction de G à U_i et fixons un isomorphisme $\varphi_i : G_i \longrightarrow \mathcal{O}_i \oplus M_i$ rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_i & \longrightarrow & G_i & \longrightarrow & M_i & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \varphi_i & & \downarrow \psi_i & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_i & \longrightarrow & \mathcal{O}_i \oplus \mathcal{O}_i & \longrightarrow & \mathcal{O}_i & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Les fonctions de transitions $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$, sur les ouverts U_{ij} , du fibré G sont de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & g_{ij} \\ 0 & f_{ij} \end{pmatrix}$$

Soit s_i^* la section duale de s_i sur U_i et posons, pour tout (i, j) , $\alpha_{ij} = g_{ij}s_j^*|_{U_{ij}} = \frac{g_{ij}}{f_{ij}}s_i^*|_{U_{ij}}$. La classe $\alpha \in H^1(\Sigma, M^{-1})$ est alors représentée par le cocycle (α_{ij}) .

Il reste à faire le calcul des fonctions de transitions du fibré $\mathcal{O}_Z(1)$ au voisinage de la section Σ . Posons $Z_i = p^{-1}(U_i)$ et $Z_{ij} := Z_i \cap Z_j$. Notons $\hat{s}_i = \varphi_i^{-1}(0, 1)$ la section de $\mathcal{O}_Z(1)$ au dessus de l'ouvert Z_i . Sur $Z_i \cap \{\hat{s}_i \neq 0\}$, $\varphi_i^{-1}(1, 0) = t_i \hat{s}_i$, où t_i est une fonction régulière sur l'ouvert considéré. Sur $Z_{ij} \cap \{\hat{s}_i \neq 0\}$,

$$\hat{s}_j = (p^*f_{ij} + p^*g_{ij}t_i)\hat{s}_i.$$

Notons que les ouverts $Z_i \cap \{\hat{s}_i \neq 0\}$ de Z recouvrent Σ . Les fonctions de transitions h_{ij} du fibré tautologique sur les ouverts $(Z_i \cap \{\hat{s}_i \neq 0\}) \cap (Z_j \cap \{\hat{s}_j \neq 0\})$ sont donc données par la formule

$$\frac{h_{ij}}{p^*f_{ij}} = 1 + \frac{p^*g_{ij}}{p^*f_{ij}}t_i.$$

Il reste à remarquer que le fermé Σ est défini, sur l'ouvert $Z_i \cap \{\hat{s}_i \neq 0\}$, par l'annulation de la fonction t_i . \square

4. Démonstrations des résultats

La démonstration du théorème occupe les paragraphes 4.1 à 4.7, la proposition sera démontrée en 4.8 et le corollaire en 4.9.

(4.1). Fixons les notations. Soient X une variété projective *normale*, de dimension $n \geq 2$, définie sur un corps k algébriquement clos de caractéristique nulle, non dénombrable, et (η, L) un feuilletage en courbes sur X avec $L \cdot C > 0$ pour toute courbe $C \subset X$.

Si $x \in X$ est un point général, la variante formelle du théorème de Frobenius fournit un unique sous-schéma formel de X complété en x , lisse en x , appelée la feuille formelle de (η, L) en x (voir [Mi87]).

Fait 4.2.– Si x est un point général de X , la feuille formelle de (η, L) en x est algébrique, autrement dit, son adhérence de Zariski dans X est une courbe.

Démonstration.– Notons X_s le lieu singulier de X et X_{ns} le complémentaire de X_s dans X . Soit D_{sat}^{ns} le diviseur des composantes de codimension 1, comptées avec multiplicités, de $Z(\eta, L) \cap X_{ns}$ et D_{sat} l'adhérence de son support dans X . Notons $\eta_{sat}^{ns} : \Omega_{X_{ns}}^1 \longrightarrow L^{-1}|_{X_{ns}}(-D_{sat}^{ns})$ le feuilletage induit : le lieu $Z(\eta_{sat}^{ns}, L_{X_{ns}}(D_{sat}^{ns}))$ des zéros de η_{sat}^{ns} est de codimension au moins 2 dans X_{ns} . Notons enfin X_r le complémentaire dans X de $\overline{Z(\eta_{sat}^{ns}, L_{X_{ns}}(D_{sat}^{ns}))}_{red} \cup \overline{Z(\eta, L)_{red} - D_{sat}}$. Remarquons enfin que le fermé $X - X_r$ est de codimension au moins 2 dans X .

Le fermé $X - (X_{ns} \cap X_r)$ est de codimension au moins 2 dans X . Il existe donc une courbe projective lisse $B \subset X_{ns} \cap X_r$ telle que

- B n'est pas une feuille du feuilletage $(\eta_{sat}^{ns}, L_{X_{ns}}(D_{sat}^{ns}))$,
- $B \not\subset D_{sat}$.

Notons $\Gamma_B \subset B \times (X_{ns} \cap X_r) \subset B \times X$ le graphe de $B \subset X$. Notons p et q les projections de $B \times X$ sur B et X respectivement, p_{ns} et q_{ns} leurs restrictions à $B \times X_{ns}$. Le feuilletage $(\eta_{sat}^{ns}, L_{X_{ns}}(D_{sat}^{ns}))$ induit un feuilletage sur $B \times X_{ns}$,

$$\Omega_{B \times X_{ns}}^1 = p_{ns}^* \Omega_B^1 \oplus q_{ns}^* \Omega_{X_{ns}}^1 \longrightarrow q_{ns}^* \Omega_{X_{ns}}^1 \longrightarrow q_{ns}^* L^{-1}|_{X_{ns}}(-D_{sat}^{ns}).$$

Ce feuilletage est partout non nul le long de Γ_B et Γ_B ne lui est tangente en aucun point. Par le théorème de Frobenius formel (voir [Mi87]), il existe un sous-schéma formel \widehat{V} lisse de dimension 2 du complété formel $\widehat{B \times X_{ns}}$ de $B \times X_{ns}$ le long de Γ_B admettant Γ_B comme schéma de définition ; les fibres du morphisme $\widehat{V} \longrightarrow B$ sont les feuilles formelles aux points correspondants de Γ_B . Le fibré normal $N_{\Gamma_B/\widehat{V}}$ de Γ_B dans \widehat{V} est naturellement isomorphe à la restriction de $q_{ns}^* L_{X_{ns}}(D_{sat}^{ns})$ à Γ_B et en particulier ample. Le schéma formel \widehat{V} est donc algébrique (voir [Bo01], Theorem

3.5), autrement dit, il existe une surface $S \subset B \times X$, irréductible et réduite, telle que $\Gamma_B \subset S$ et $\widehat{V} \subset \widehat{S}$ où \widehat{S} est le complété formel de S le long de Γ_B . Les feuilles de $(\eta_{sat}^{ns}, L|_{X_{ns}}(D_{sat}^{ns}))$ aux points de $B \subset X$ sont donc algébriques, et, puisque $B \not\subset D_{sat}$, ces feuilles, sauf éventuellement un nombre fini, sont des feuilles du feuilletage (η, L) sur X . \square

(4.3). *La variété des feuilles.*— Soit $\text{Chow}(X)$ la variété de Chow de X (voir [Ko96]) des cycles effectifs sur X . Soit \bar{Y} la normalisation de l'adhérence du lieu des points de $\text{Chow}(X)$ correspondants aux cycles irréductibles et réduits, de support les feuilles du feuilletage (η, L) , et soit $\bar{Z} \subset \bar{Y} \times X$ le cycle correspondant. Rappelons que toute composante irréductible de \bar{Z} domine une composante irréductible de \bar{Y} . Notons p et q les projections de $\bar{Y} \times X$ sur \bar{Y} et X respectivement, et $p_{\bar{Z}}, q_{\bar{Z}}$ leurs restrictions au support du cycle \bar{Z} . L'ensemble des composantes irréductibles de \bar{Y} est au plus dénombrable et chacune de ces composantes est de type fini sur le corps de base k . Le morphisme $q_{\bar{Z}}$ est dominant (voir 4.2) et, puisque k n'est pas dénombrable, l'une des composantes irréductibles de \bar{Z} domine X . Soit Y la composante irréductible de \bar{Y} correspondante et soit $Z \subset Y \times X$ le cycle correspondant. Notons que le cycle Z est irréductible et réduit puisqu'il existe une partie dense de Y dont les points correspondent à des cycles irréductibles et réduits de X . Soient p_Z et q_Z , les morphismes naturels vers Y et X respectivement. Notons toujours p et q les projections de $Y \times X$ sur Y et X respectivement.

Fait 4.4.— *Les fibres générales de p_Z sont des feuilles du feuilletage (η, L) .*

Démonstration.— Le feuilletage (η, L) sur X induit un feuilletage sur $Y \times X$

$$\Omega_{Y \times X}^1 = p^* \Omega_Y^1 \oplus q^* \Omega_X^1 \longrightarrow q^* \Omega_X^1 \longrightarrow q^* L^{-1}.$$

L'application composée

$$I_{Z/Y \times X} / I_{Z/Y \times X}^2 \longrightarrow \Omega_{Y \times X|Z}^1 \longrightarrow q^* L^{-1}|_Z$$

est nulle sur une partie dense de Z et donc identiquement nulle puisque le faisceau $q^* L^{-1}|_Z$ est sans torsion. Il existe donc une factorisation $\eta_Z : \Omega_Z^1 \longrightarrow q^* L^{-1}|_Z$ et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{Y \times X|Z}^1 & \longrightarrow & \Omega_Z^1 \\ \downarrow & \searrow \eta_Z & \\ q^* L^{-1}|_Z & & \end{array}$$

Le lieu singulier $Z(\eta_Z, q_Z^* L)$ est intersection schématique des fermés $Y \times Z(\eta, L)$ et Z de $Y \times X$. L'application composée

$$p_Z^* \Omega_Y^1 \longrightarrow \Omega_Z^1 \longrightarrow q_Z^* L^{-1}$$

est nulle sur les fibres générales de p_Z et donc identiquement nulle. Le feuilletage $(\eta_Z, q_Z^* L)$ est donc vertical relativement à p_Z , autrement dit, il existe une factorisation

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega_Z^1 & \longrightarrow & \Omega_{Z/Y}^1 \\
 \downarrow \eta_Z & & \swarrow \\
 q_Z^* L^{-1} & &
 \end{array}$$

Le fermé $Z(\eta_Z, q_Z^* L)$ est un fermé propre de Z et ne rencontre les fibres générales de p_Z qu'en un nombre fini de points. Lesdites fibres sont irréductibles et réduites et sont donc des feuilles du feuilletage $(\eta_Z, q_Z^* L)$. Le morphisme q_Z est ainsi *birationnel*. \square

Fait 4.5. – *Les feuilles du feuilletage (η, L) sont des courbes rationnelles de L -degré 1 ou 2.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du corollaire 1.3. \square

Nous dirons qu'une feuille est *générale* si le cycle correspondant est un point général de Y .

Fait 4.6. – *Si le L -degré d'une feuille générale est 2 alors $Z(\eta, L) = \emptyset$. Si ce degré est 1, alors le support de $Z(\eta, L)$ est un point et les feuilles générales passent toutes par ce point.*

Démonstration. – Supposons le L -degré d'une feuille générale égal à 2 et $Z(\eta, L) \neq \emptyset$. Soit $x \in Z(\eta, L)$. Soit $C_0 \subset X$ une courbe projective passant par x et rencontrant une feuille générale. Soit $C_1 \subset Z$ une courbe projective telle que $q_Z(C_1) = C_0$. Soient B la normalisation de $p_Z(C_1)$ et $S \subset B \times X$ le cycle correspondant ; S est irréductible et réduit. Supposons, ce qui est toujours possible, que $g(B) > 0$. Soient p_S et q_S les restrictions à S des projections de $B \times X$ sur B et X respectivement. Le feuilletage (η, L) induit, comme ci-dessus, un feuilletage en courbes $\eta_S : \Omega_S^1 \rightarrow q_S^* L^{-1}$. Le lieu singulier $Z(\eta_S, q_S^* L)$ est intersection schématique des fermés $B \times Z(\eta, L)$ et S de $B \times X$. Soit L_S le fibré $q_S^* L$. Soit $n : S^n \rightarrow S$ la normalisation de S et $\eta_n : \Omega_{S^n}^1 \rightarrow n^* L_S^{-1}$ le relèvement de $\eta_S : \Omega_S^1 \rightarrow L_S^{-1}$ à S^n (voir Lemme 1.2). Soit $S' := q_S(S) \subset X$ et soit $q_{S^n} := q_S \circ n$. Le fibré L_{S^n} numériquement effectif et une courbe $C \subset S^n$ est contractée par q_{S^n} si et seulement si $L_{S^n} \cdot C = 0$. Enfin, les courbes tracées sur S^n et contractées par q_{S^n} sont horizontales relativement à $p_{S^n} := p_S \circ n$. Les hypothèses de la proposition 2.1 sont satisfaites. La surface $S^n \rightarrow B$ est géométriquement réglée et le lieu singulier $Z(\eta_{S^n}, n^* L)$ est vide (si F est une fibre générale de p_{S^n} , $L \cdot F = 2$ par hypothèse). Par choix de C_0 , $\emptyset \neq (B \times \{x\}) \cap S \subset (B \times Z(\eta, L)_{\text{red}}) \cap S$. Et, d'après le lemme 1.2,

$$n^{-1}((B \times Z(\eta, L)_{\text{red}}) \cap S) = n^{-1}(Z(\eta_S, L_S)_{\text{red}}) = Z(\eta_{S^n}, n^* L_S)_{\text{red}},$$

ce qui est absurde. Le feuilletage (η, L) est donc régulier.

Supposons maintenant le L -degré d'une feuille générale égal à 1. Supposons $Z(\eta, L) \neq \emptyset$ et soient $x, x' \in Z(\eta, L)$. Soit maintenant $C_0 \subset X$ une courbe complète passant par x, x' et rencontrant une feuille générale. Utilisons la même construction que ci-dessus et les mêmes notations. Par hypothèse, $L \cdot F = 1$ et le lieu singulier $Z(\eta_{S^n}, n^* L)$ est donc une courbe irréductible contractée par q_S (voir proposition 2.1). Par choix de la courbe C_0 , $(B \times \{x\}) \cap S \neq \emptyset$ et $(B \times \{x'\}) \cap S \neq \emptyset$. D'où $x = x'$. Un argument analogue montre que $Z(\eta, L)$ n'est pas vide. \square

(4.7). *Supposons maintenant* $Z(\eta, L) \neq \emptyset$. D'après les résultats démontrés en 4.5 et 4.6, le L -degré d'une feuille générale est égal à 1. Quitte à remplacer Z par sa normalisation, supposons Z normale. Le morphisme p_Z est alors lisse (voir [Ko96], Theorem II 2.8). Soit $x \in X$ le support de $Z(\eta, L)$ (voir 4.6).

Le point, au coeur de la preuve du lemme de cassage de Mori, est le résultat bien connu suivant. Si $p_S : S \rightarrow B$ est une surface géométriquement réglée et $q_S : S \rightarrow S'$ est un morphisme génériquement fini, il existe au plus une courbe, irréductible et réduite, tracée sur S , horizontale relativement à p_S et contractée par q_S .

Les fibres du morphisme q_Z sont connexes par le théorème de Zariski et, en particulier, les composantes irréductibles des fibres de q_Z sont de dimension > 0 . L'une des composantes de $\Sigma := q_Z^{-1}(x)$ est de codimension 1 dans Z (voir 4.6). On déduit de la remarque précédente, que le fermé Σ est irréductible de codimension 1 dans Z , et que le morphisme q_Z induit un isomorphisme de $Z - q_Z^{-1}(x)$ sur $X - \{x\}$.

Soit $B \subset Y$ est une courbe lisse générique, de genre $g(B) > 0$. La surface $p_Z^{-1}(B)$ est la normalisation de son image S dans $B \times X$. L'intersection $\Sigma \cap p_Z^{-1}(B)$ est donc l'unique section de $p_Z^{-1}(B) \rightarrow B$ contractée par q_Z (voir Proposition 2.1). Le morphisme $\Sigma \rightarrow Y$ induit par p_Z est donc birationnel et fini : c'est un isomorphisme.

Soit $G := p_{Z*}\mathcal{O}_Z(\Sigma)$. Le schéma $Z \rightarrow Y$ s'identifie au fibré projectif $\mathbf{P}_Y(G) \rightarrow Y$ et le fibré $\mathcal{O}_Y(\Sigma)$ au fibré tautologique $\mathcal{O}_Y(1)$. La section Σ de p_Z correspond à un quotient inversible M de G sur Y . Le fibré G est une extension de M par le fibré trivial \mathcal{O}_Y

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Soit α la classe dans $H^1(\Sigma, M^{-1})$ de cette extension. Le fibré q_Z^*L est de degré 1 sur les fibres de p_Z et sa restriction à Σ est triviale. Il est donc isomorphe au fibré $\mathcal{O}_Z(1) \otimes p_Z^*M^{-1}$.

Soit 2Σ le deuxième voisinage infinitésimal de Σ dans Z . La classe du fibré $\mathcal{O}_Z(1) \otimes p_Z^*M^{-1}$ dans $\text{Pic}(2\Sigma) \simeq \text{Pic}(\Sigma) \oplus H^1(\Sigma, M^{-1})$ est $(0, \alpha)$ (voir Lemme 3.3). La classe du fibré q_Z^*L dans $\text{Pic}(2\Sigma)$ étant nulle, la classe α l'est également. L'extension définie par α est donc scindée et le morphisme q_Z s'identifie à la contraction de la section de $\mathbf{P}_Y(\mathcal{O}_Y \oplus M) \rightarrow Y$ de fibré normal M . La section de fibré normal M^{-1} ne rencontre pas la section précédente, et le diviseur associé dans X , noté $\mathcal{O}_X(Y)$, s'identifie au fibré L . \square

(4.8). *Démonstration de la proposition.* – Supposons X de dimension 2 et $Z(\eta, L) = \emptyset$. Soit $C_0 \subset X$ une courbe complète générale. Reprenons la construction et les notations de 4.6. Par hypothèse, $L \cdot F = 2$. Les surfaces S^n et Z sont égales. Le morphisme q_{S^n} est fini sur $S' = X$ (voir proposition 2.1) et birationnel (voir 4.4). C'est donc un isomorphisme. \square

(4.9). *Démonstration du corollaire.* – Supposons X lisse de dimension ≥ 2 et supposons le L -degré d'une feuille générale égal à 2. Le feuilletage (η, L) est donc régulier par 4.6. Les feuilles dudit feuilletage sont algébriques par un argument analogue à celui utilisé en 4.2 et lisses puisque X l'est. Ce sont donc toutes des

courbes rationnelles lisses de L -degré 2. De plus, les composantes irréductibles des fibres ensemblistes de p_Z sont toutes des feuilles et donc de L -degré 2 par ce qui précède. Les fibres de p_Z sont donc irréductibles et génériquement réduites et le morphisme p_Z est en fait lisse (voir [Ko96], Theorem II 2.8). Le morphisme q_Z est birationnel et fini et c'est donc un isomorphisme. Ceci démontre la première assertion du corollaire.

Supposons le L -degré d'une feuille générale égal à 1. Les variétés Y et Z sont lisses puisque X l'est. Le lieu exceptionnel de q_Z est un diviseur irréductible contracté sur un point $x \in X$, le support de $Z(\eta, L)$. Un résultat de Moishezon dans le cadre analytique complexe et de Luo dans un contexte algébrique entraîne que le morphisme q_Z est l'éclatement de centre x (voir [Lu93]). Par suite, $Y \simeq \mathbf{P}^{n-1}$ et $M \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(-k)$ avec $k > 0$. La lissité de X entraîne finalement $k = 1$ et $X \simeq \mathbf{P}^n$. \square

Références

- [BoMc01] Bogomolov, F.A., McQuillan, M.L. (ed.): Rational curves on foliated varieties. Preprint, IHES, 2001
- [Bo01] Bost, J.-B.: Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **93**, 161–221 (2001)
- [BuWa74] Burns, D.M., Wahl, J.: Local contributions to global deformations of surfaces. Invent. Math. **26**, 67–88 (1974)
- [De01] Debarre, O., Higher-dimensional algebraic geometry. Universitext, Springer-Verlag, 2001
- [Ha70] Hartshorne, R.: Ample subvarieties of algebraic varieties. Lecture Notes in Mathematics **156**, Springer-Verlag, 1970
- [Ha77] Hartshorne, R.: Algebraic Geometry. Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer-Verlag, 1977
- [Ko96] Kollár, J.: Rational curves on algebraic varieties. Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete **32**, Springer-Verlag, 1996
- [Lu93] Luo, Z.: Factorization of birational morphisms of regular schemes. Math. Z. **212**, 505–509 (1993)
- [Mi87] Miyaoka, Y.: Deformations of a morphism along a foliation and applications. dans Algebraic geometry-Bowdoin 1985, Proc. Symp. Pure Math. **46-1**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, pp. 245–268
- [Sc00] Schröer, S.: On contractible curves on normal surfaces. J. Reine. Angew. Math. **524**, 1–15 (2000)
- [Se66] Seidenberg, A.: Derivations and integral closure. Pacific J. Math. **16**, 167–173 (1966)
- [Wa83] Wahl, J.: A cohomological characterization of \mathbf{P}^n . Invent. Math. **72**, 315–322 (1983)