Bull. Soc. math. France,
127, 1999, p. 229–253.

STRUCTURES DE POISSON SUR LES VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES DE DIMENSION 3

PAR STÉPHANE DRUEL (*)

RÉSUMÉ. — Nous classifions les variétés algébriques de dimension 3 munie d'une structure de Poisson quasi-régulière non nulle (*i.e.* le tenseur de Poisson est de rang 2 sauf en un nombre fini de points). Nous montrons qu'une telle variété est une variété abélienne, un fibré plat sur une surface abélienne ou bien le quotient par un groupe fini du produit d'une courbe et d'une surface symplectique.

ABSTRACT. — POISSON STRUCTURES ON ALGEBRAIC 3-FOLDS. — We classify all algebraic threefolds which admit a quasi-regular Poisson structure (*i.e.* up to finitely many points, the Poisson tensor has rank 2). We prove that such a manifold is an abelian variety, a flat bundle over an abelian surface or the quotient by a finite group of the product of a curve and a symplectic surface.

Introduction

Soit X une variété algébrique lisse sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Une *structure de Poisson* sur X est la donnée d'une structure d'algèbre de Lie sur le faisceau structural $\mathcal{O}_X$ de X, qui soit une dérivation en chacune des variables. Une telle structure est définie par un tenseur antisymétrique non nul

$$\sigma \in H^0(X, \overset{2}{\wedge} \mathcal{T}_X),$$

le *bivecteur de Poisson*, duquel on déduit une flèche $\mathcal{O}_X$-linéaire

$$\Omega_X^1 \longrightarrow \mathcal{T}_X.$$

Le *rang* de la structure en $x \in X$ est, par définition, le rang de l'application

$$\Omega_X^1 \otimes k(x) \longrightarrow \mathcal{T}_X \otimes k(x).$$

(*) Texte reçu le 19 mars 1998, révisé le 18 janvier 1999, accepté le 17 février 1999.
S. DRUEL, DMI, École Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris.
Email : druel@clipper.ens.fr.

Classification AMS : 14 J 30, 58 F 05.

Mots clés : structure de Poisson, variété algébrique.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1999/229/$ 5.00

La structure est dite *régulière* lorsque son rang est constant. Elle est dite *quasi-régulière* lorsqu'elle est régulière sauf en un nombre fini de points. Notons que le rang d'une structure de Poisson en un point est pair puisqu'une telle structure est par définition antisymétrique.

Une variété abélienne de dimension au moins deux possède de nombreuses structures de Poisson régulières non triviales. En effet, toute forme multilinéaire alternée non nulle sur l'espace tangent à l'origine fournit une telle structure.

Les surfaces projectives admettant une structure de Poisson non triviale sont les surfaces K3, les surfaces abéliennes et certaines surfaces réglées ; une telle structure est alors définie par la seule donnée d'une section du fibré anticanonique.

Ce travail est consacré à l'étude des variétés algébriques projectives lisses de dimension 3 admettant une structure de Poisson non triviale. Une telle structure étant définie par un tenseur antisymétrique d'ordre 3, on s'attend à ce que ladite structure ne s'annule qu'en un nombre fini de points, seul cas que nous étudierons. Le résultat principal est le théorème :

THÉORÈME. — *Soit X une variété projective lisse de dimension* 3*. La variété X admet une structure de Poisson quasi-régulière non nulle si et seulement si X vérifie l'une des conditions suivantes* :

1) *X est une variété abélienne ; la structure de Poisson est déterminée par une forme alternée de rang* 2 *sur l'espace tangent à l'origine.*

2) *X possède une fibration en droites projectives munie d'une connexion plate, de base une surface abélienne S ; la structure de Poisson est défini par le pull-back de la structure symplectique sur S au moyen de la connexion.*

3) *$X = (C \times S)/G$ où C est une courbe, S une surface abélienne et $G \subset \mathrm{Aut}(C)$ un groupe fini opérant librement sur $C \times S$ par la formule :*

$$g \cdot (c, s) = \big(g \cdot c, t_g(c) + u_g(s)\big), \quad g \in G,\ c \in C,\ s \in S,$$

où u_g est un automorphisme de groupes de S respectant la structure symplectique et t_g une fonction régulière sur C à valeurs dans S ; la structure de Poisson est induite par la structure symplectique de S.

4) *$X = (C \times S)/G$ où C est une courbe, S une surface* K3 *et G un groupe fini opérant librement sur C, opérant sur S en respectant la structure symplectique et sur le produit $C \times S$ par le produit de ses actions sur chacun des facteurs ; la structure de Poisson est induite par la structure symplectique de S.*

De plus, la structure de Poisson est régulière.

La démonstration de ce résultat repose sur la description des contractions extrémales d'une variété projective lisse non minimale de dimension 3 (voir [Mo]). Ainsi, nous montrons qu'une variété projective non minimale de dimension 3 admettant une structure de Poisson quasi-régulière non triviale est un fibré en coniques, ce qui fait l'objet du paragraphe 2, le paragraphe 1 donnant les propriétés essentielles de ces structures en dimension trois. Dans les paragraphes 3 et 4, nous étudions le cas où la variété est minimale en étudiant le morphisme d'Albanese puis le morphisme canonique.

REMERCIEMENTS. — Je tiens à exprimer ici tout mes remerciements à Arnaud Beauville pour son aide au cours de la préparation de ce travail. Mes remerciements s'adressent également au *referee* pour ses nombreuses remarques et les simplifications apportées (prop. 2.3 et 4.8).

1. Propriétés

Une variété (algébrique) désignera un schéma intègre, séparé et de type fini sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Nous identifierons, sans le mentionner, un schéma et l'espace analytique complexe qui lui est associé et nous supposerons toujours qu'une variété est lisse, sauf mention du contraire.

Soit X une variété algébrique de dimension 3 munie d'une structure de Poisson régulière non nulle. Le bivecteur de Poisson

$$\sigma \in H^0(X, \overset{2}{\wedge} \mathcal{T}_X)$$

fournit une application

$$\mathcal{O}_X \hookrightarrow \overset{2}{\wedge} \mathcal{T}_X,$$

et, compte tenu de l'isomorphisme canonique $\overset{2}{\wedge} \mathcal{T}_X \otimes \omega_X \cong \Omega^1_X$, on en déduit une injection de fibrés vectoriels

$$\omega_X \hookrightarrow \Omega^1_X.$$

Réciproquement, une telle injection de fibrés vectoriels définit une structure de Poisson régulière dès que l'identité de Jacobi est satisfaite. Un calcul en coordonnées locales permet alors de prouver le :

LEMME 1.1. — *Soit X une variété algébrique* (*lisse*) *de dimension* 3.

1) *Si X est munie d'une structure de Poisson régulière non nulle, on a une suite exacte* :

$$0 \to \omega_X \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow \mathcal{T}_X \longrightarrow \omega_X^{-1} \to 0\ ;$$

le faisceau $\mathcal{F} = \mathrm{Ker}(\mathcal{T}_X \to \omega_X^{-1})$ est un fibré vectoriel de rang 2 intégrable, c'est-à-dire stable par le crochet de Lie naturel sur $\mathcal{T}_X$.

2) *Réciproquement, une section partout non nulle du fibré* $\overset{2}{\wedge}\mathcal{T}_X$ *définit une structure de Poisson régulière non nulle dès que le fibré* $\mathcal{F}$ *correspondant est intégrable.*

COROLLAIRE 1.2. — *Soit* X *une variété projective de dimension* 3 *munie d'une structure de Poisson quasi-régulière non nulle. Alors il existe une injection de faisceaux* $\omega_X \hookrightarrow \Omega^1_X$ *dont le conoyau est sans torsion et localement libre de rang* 2 *sauf en un nombre fini de points.*

PROPOSITION 1.3. — *Soit* X *une variété projective de dimension* 3 *munie d'une structure de Poisson quasi-régulière non nulle.*

1) *La première classe de Chern de* X $c_1(X) = -c_1(\omega_X) \in H^1(X, \Omega^1_X)$ *provient de* $H^1(X, \omega_X)$ *par la flèche* $H^1(X, \omega_X) \longrightarrow H^1(X, \Omega^1_X)$ *associée à la structure de Poisson.*

2) *On a* $c_1(X)^2 = 0$ *dans* $H^4(X, \mathbb{C})$.

Démonstration. — Remarquons que le point 2) est une conséquence immédiate du point 1). Soit U l'ouvert de Zariski où la structure de Poisson est non nulle. Le fermé $Y = X - U$ étant de codimension 3, les groupes de cohomologie $H^i_Y(X, \omega_X)$ et $H^i_Y(X, \Omega^1_X)$ sont nuls pour $i \in \{0, 1, 2\}$. Il en résulte des isomorphismes naturels

$$H^1(X, \omega_X) \cong H^1(U, \omega_U), \quad H^1(X, \Omega^1_X) \cong H^1(U, \Omega^1_U).$$

Le diagramme suivant étant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, \omega_X) & \longrightarrow & H^1(X, \Omega^1_X) \\ \wr\downarrow & & \downarrow\wr \\ H^1(U, \omega_U) & \longrightarrow & H^1(U, \Omega^1_U), \end{array}$$

il suffit de prouver l'assertion lorsque la structure est régulière. Soit $(U_\alpha)_\alpha$ un recouvrement ouvert de X (pour la topologie usuelle) tel que, pour tout indice α, il existe des coordonnées locales $(z_{\alpha,1}, z_{\alpha,2}, z_{\alpha,3})$ sur U_α adaptées à la structure de Poisson (voir [W]). Dans ces coordonnées, la matrice du tenseur de Poisson est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les sections $(\mathrm{d}z_{\alpha,3})_\alpha$ trivialisent donc le fibré ω_X, ce dernier étant le noyau de la structure de Poisson. Il en résulte que les fonctions de transition dudit fibré, relativement à ces trivialisations, sont :

$$\phi_{\alpha\beta} = \frac{\partial z_{\beta,3}}{\partial z_{\alpha,3}}, \quad \text{pour tout couple d'indices } (\alpha, \beta).$$

On en déduit les formules les formules :

$$\frac{\partial z_{\beta,3}}{\partial z_{\alpha,2}} \equiv 0, \quad \frac{\partial z_{\beta,3}}{\partial z_{\alpha,1}} \equiv 0.$$

D'où :

$$\frac{\mathrm{d}\phi_{\alpha\beta}}{\phi_{\alpha\beta}} = \frac{1}{\frac{\partial z_{\beta,3}}{\partial z_{\alpha,3}}} \frac{\partial^2 z_{\beta,3}}{\partial z_{\alpha,3}{}^2} \, \mathrm{d}z_{\beta,3}.$$

Le cocycle $(\mathrm{d}\phi_{\alpha\beta}/\phi_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta}$ est donc à valeurs dans le faisceau ω_X, ce qui termine la preuve de notre proposition. $\square$

Rappelons qu'une variété est dite *minimale* lorsque le fibré canonique est numériquement effectif.

COROLLAIRE 1.4. — *Soit X une variété projective minimale de dimension 3 munie d'une structure de Poisson quasi-régulière non nulle. Alors la dimension de Kodaira $\kappa(X)$ de X vérifie les inégalités $0 \leq \kappa(X) \leq 1$.*

Démonstration. — Par le théorème d'Abondance (voir [MP]), la dimension de Kodaira $\kappa(X)$ d'une variété projective minimale de dimension 3 se calcule par la formule

$$\kappa(X) = \max\bigl\{i\,;\ c_1(\omega_X)^i c_1(\mathcal{O}_X(H))^{3-i} \neq 0\bigr\}$$

où H est une section hyperplane de X, de sorte que, par la proposition 1.3, on obtient les inégalités $0 \leq \kappa(X) \leq 1$. $\square$

2. Cas où X n'est pas minimale

LEMME 2.1. — *Soit X une variété projective non minimale munie d'une structure de Poisson quasi-régulière non nulle. Alors X est un fibré en coniques. En particulier, X est de dimension de Kodaira $\kappa(X) = -\infty$.*

Démonstration. — Par le théorème de structure de S. Mori (voir [Mo, thm. 3.3 et thm. 3.5]) il suffit d'étudier les cas suivants.

Cas 1. — Il existe une sous variété $Z \subset X$ de dimension 2 ou 3 telle que le fibré $\omega_X^{\otimes -1}{}_{|Z}$ soit ample. Ce cas est exclu par la proposition 1.3.

Cas 2. — Il existe un morphisme $X \xrightarrow{\pi} S$, où S est une variété projective lisse, et une courbe lisse $C \subset S$ tels que X soit l'éclaté de la courbe C dans S. Soit E le diviseur exceptionnel. L'isomorphisme $\pi_*\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_S$ permet de définir une structure de Poisson sur S à l'aide de celle existant sur X. On vérifie que le diagramme suivant est commutatif, les flèches horizontales étant données par les structures de Poisson :

$$\begin{array}{ccc} H^1(X,\omega_X) & \longrightarrow & H^1(X,\Omega^1_X) \\ \wr\uparrow & & \uparrow \\ H^1(S,\omega_S) & \longrightarrow & H^1(S,\Omega^1_S). \end{array}$$

On déduit de la proposition 1.3 que $c_1(X)$ provient d'un élément de $H^1(S,\Omega^1_S)$, ce qui est absurde puisque

$$c_1(X) = -c_1\big(\mathcal{O}_X(E)\big) + \pi^* c_1(S)$$

et puisque E est contracté par π.

Cas 3. — Il existe un morphisme $X \to S$, où S est une surface projective lisse et connexe, tel que, pour tout point géométrique η de S, la fibre X_η soit une conique de $\mathbb{P}^2_{k(\eta)}$. $\square$

La fin de ce paragraphe est consacrée à l'étude de ce dernier cas.

PROPOSITION 2.2. — *Soit $X \xrightarrow{\pi} S$ un fibré en coniques muni d'une structure de Poisson quasi-régulière non nulle.*

1) *Le morphisme π est lisse et S est une surface* K3 *ou une surface abélienne.*

2) *La structure de Poisson est régulière.*

Démonstration. — Prouvons la première assertion. Le lieu de dégénérescence de π est un diviseur effectif C_0 réduit, à croisements normaux. Audessus d'un point régulier de C_0, la fibre schématique de π est la réunion de deux courbes rationnelles lisses distinctes (voir [Be2, prop. 1.2]).

Nous allons prouver la formule

$$-4c_1(S) + c_1\big(\mathcal{O}_S(C_0)\big) \equiv 0.$$

Pour établir cette relation, il suffit de montrer l'égalité

$$\big(-4c_1(S) + c_1(\mathcal{O}_S(C_0))\big) \cdot c_1\big(\mathcal{O}_S(C)\big) = 0$$

pour toute courbe lisse C qui coupe transversalement C_0. En particulier, C ne coupe pas le lieu singulier de C_0. Posons

$$D = \pi^{-1}(C).$$

Un calcul en coordonnées locales montre que D est une surface lisse (connexe). En outre, il n'est pas difficile de voir que l'on peut contracter l'une des composantes irréductibles de chaque fibre singulière du morphisme $D \xrightarrow{\pi_{|D}} C$, de sorte que D est l'éclaté en $c_1(\mathcal{O}_S(C_0)) \cdot c_1(\mathcal{O}_S(C))$ points d'une surface réglée lisse et connexe D_0. Soit $D \xrightarrow{\phi} D_0$ le morphisme correspondant. L'application rationnelle naturelle $D_0 \cdots \to C$ se prolonge en un morphisme $D_0 \xrightarrow{\pi_0} C$ tel que $\pi_{|D} = \pi_0\phi$, de sorte que la surface $D_0 \xrightarrow{\pi_0} C$ est une surface géométriquement réglée au-dessus de C. La formule d'adjonction fournit l'égalité

$$\omega_{X\,|D} = \omega_D \otimes \mathcal{N}_{D/X}^{-1}.$$

Puisque $\mathcal{N}_{D/X} = \pi_{|D}^{*}\mathcal{N}_{C/S}$, $c_1(\mathcal{N}_{D/X})$ est numériquement équivalent à $c_1(\mathcal{O}_S(C))^2$ fibres du morphisme $D \xrightarrow{\pi_{|D}} C$. On en déduit que

$$\begin{aligned} c_1(D)^2 &= c_1(D_0)^2 - c_1\big(\mathcal{O}_S(C_0)\big) \cdot c_1\big(\mathcal{O}_S(C)\big) \\ &= 8(1 - g(C)) - c_1\big(\mathcal{O}_S(C_0)\big) \cdot c_1\big(\mathcal{O}_S(C)\big), \end{aligned}$$

et

$$c_1(D) \cdot c_1(\mathcal{N}_{D/X}) = 2c_1\big(\mathcal{O}_S(C)\big)^2$$

(*cf.* [H, chap. V.2 et V.3]). Par la proposition 1.3, on a

$$c_1(X)^2 = 0$$

et on obtient la formule

$$8\big(1 - g(C)\big) - c_1\big(\mathcal{O}_S(C_0)\big) \cdot c_1\big(\mathcal{O}_S(C)\big) + 4c_1\big(\mathcal{O}_S(C)\big)^2 = 0.$$

Or la formule d'adjonction donne la relation

$$2\big(g(C) - 1\big) = c_1\big(\mathcal{O}_S(C)\big)^2 - c_1\big(\mathcal{O}_S(C)\big) \cdot c_1(S).$$

On obtient finalement la formule

$$\big(-4c_1(S) + c_1(\mathcal{O}_S(C_0))\big) \cdot c_1\big(\mathcal{O}_S(C)\big) = 0,$$

ce qui prouve notre assertion.

Prouvons que le diviseur K_S est effectif. Par la proposition 1.3, l'élément $c_1(X) \in H^1(X, \Omega_X^1) \subset H^2(X, \mathbb{C})$ est image d'un élément de $H^1(X, \omega_X)$ par l'application $H^1(X, \omega_X) \to H^1(X, \Omega_X^1)$. Puisque $c_1(X)$ est non nul, ce qui se vérifie par restriction à la fibre générique de π, il en résulte que l'espace vectoriel $H^1(X, \omega_X)$ est non nul. Par dualité de Serre, on a

$$h^1(X, \omega_X) = h^2(X, \mathcal{O}_X).$$

Puisque $R^1\pi_*\mathcal{O}_X = (0)$ et $\pi_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S$, on a

$$h^2(X, \mathcal{O}_X) = h^2(S, \mathcal{O}_S)$$

et, par dualité de Serre à nouveau, on obtient finalement $h^0(S, \omega_S) \geq 1$, ce qui démontre l'assertion.

Le diviseur $K_S + C_0$ étant numériquement trivial et K_S étant effectif, les diviseurs K_S et C_0 sont triviaux. Il en résulte que π est lisse et que S est soit une surface K3, soit une surface abélienne.

Montrons maintenant que la structure de Poisson est régulière. Puisque π est lisse, π est en particulier topologiquement localement trivial et on a donc

$$e(X) = e(\mathbb{P}^1)e(S) = 2e(S),$$

où $e(\,.\,)$ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré. Soit $\sigma \in H^0(X, \overset{2}{\wedge}\mathcal{T}_X)$ le bivecteur de Poisson définissant la structure de Poisson sur X. Le lieu Z des zéros de σ étant de codimension 3, on a $\deg(Z) = c_3(\overset{2}{\wedge}\mathcal{T}_X)$. Or $c_3(\overset{2}{\wedge}\mathcal{T}_X) = c_1(X)c_2(X) - c_3(X)$ et on a donc la formule

$$\deg(Z) = c_1(X)c_2(X) - c_3(X).$$

En outre, pour un fibré en coniques, on a

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \chi(\mathcal{O}_S)$$

puisque $R^1\pi_*\mathcal{O}_X = (0)$ et $\pi_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S$. Par la formule de Noether,

$$12\chi(\mathcal{O}_S) = c_1(S)^2 + c_2(S) = e(S).$$

Finalement, on obtient

$$\deg(Z) = c_1(X)c_2(X) - c_3(X) = 24\chi(\mathcal{O}_X) - e(X) = 0$$

en utilisant la formule de Riemann-Roch $\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{1}{24}c_1(X)c_2(X)$, ce qui permet de conclure. $\square$

Proposition 2.3. — *Soit $X \xrightarrow{\pi} S$ une fibration en droites projectives munie d'une structure de Poisson régulière non nulle. Alors la surface S admet une structure de Poisson non triviale induite par l'isomorphisme naturel $\mathcal{O}_S \cong \pi_*\mathcal{O}_X$.*

Démonstration. — Supposons que la structure de Poisson induite sur S soit identiquement nulle. Dans ce cas, les fibres de $\pi^*\Omega^1_S \subset \Omega^1_X$ sont des sous-espaces isotropes de dimension 2 et contiennent les fibres du faisceau ω_X, puisque ce dernier est le noyau de la structure de Poisson. On en déduit l'inclusion $\mathcal{T}_{X/S} \subset \mathcal{F}(\subset \mathcal{T}_X)$ (notations du lemme 1.1). Les fibres de π sont donc des sous-variétés intégrales du champ $\mathcal{F}$ et, puisque ce dernier est de rang constant, chaque fibre est contenue dans une unique feuille symplectique.

Remarquons alors que le feuilletage sur X induit un feuilletage sur S par des courbes. Choisissons un point $s \in S$ et un disque ouvert Δ inclus dans la feuille contenant s. Clairement

$$\Sigma = \pi^{-1}(\Delta) = \Delta \times \mathbb{P}^1.$$

Or, la structure de Poisson induit une structure symplectique sur Σ, c'est-à-dire une trivialisation du fibré $\overset{2}{\wedge}\mathcal{T}_\Sigma$, ce qui est évidemment impossible. ∎

Proposition 2.4. — *Soit $X \xrightarrow{\pi} S$ une fibration en droites projectives. On suppose X munie d'une structure de Poisson régulière non nulle. Alors S est une surface* K3 *et $X = S \times \mathbb{P}^1$, ou bien S est une surface abélienne et la fibration est munie d'une connexion plate.*

Démonstration. — Nous savons que S est une surface K3 ou une surface abélienne par la proposition 2.2. La structure de Poisson induite sur S est donc partout non nulle. Un calcul en coordonnées locales permet de se rendre compte que la flèche $\mathcal{F} \to \pi^*\Omega^1_S$, déduite de la projection naturelle $\mathcal{T}_X \to \pi^*\Omega^1_S$ et de l'inclusion $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}_X$, est un isomorphisme (notations du lemme 1.1). On en déduit l'existence d'une section $\pi^*\mathcal{T}_S \xrightarrow{s} \mathcal{T}_X$ de la projection $\mathcal{T}_X \to \pi^*\mathcal{T}_S$, telle que $s(\pi^*\mathcal{T}_S) = \mathcal{F}$. La distribution définie par cette section est donc intégrable (lemme 1.1) et détermine une connexion plate sur π ; celui-ci est analytiquement localement trivial et les fonctions de transition sont localement constantes. La fibration précédente est donc associée à une représentation de $\pi_1(X)$ dans le groupe $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$. Rappelons enfin qu'une surface K3 est simplement connexe et donc qu'une telle fibration est triviale, ce qui achève la preuve de notre proposition. ∎

Proposition 2.5. — *La variété $S \times \mathbb{P}^1$, S étant une surface* K3, *admet une structure de Poisson régulière non nulle et il en est de même pour toute fibration en droites projectives munie d'une connexion plate*, *de base une surface abélienne.*

Démonstration. — La première assertion est claire. Soit $X \xrightarrow{\pi} S$ une fibration en droites projectives munie d'une connexion plate, de base une surface abélienne. Soit $(U_\alpha)_\alpha$ un recouvrement ouvert de S et ϕ_α des isomorphismes $\pi^{-1}(U_\alpha) \cong U_\alpha \times \mathbb{P}^1$ au-dessus de U_α de sorte que les fonctions de transition $\phi_\alpha \phi_\beta^{-1}$ soient localement constantes. On munit le produit $U_\alpha \times \mathbb{P}^1$ de la structure de Poisson produit, une structure symplectique étant fixée au préalable sur S. On vérifie que les isomorphismes ϕ_α sont des morphismes de Poisson, de sorte que l'on obtient sur X une structure de Poisson régulière non triviale, ce qui termine la preuve de notre proposition. $\square$

Nous avons donc démontré le théorème :

Théorème 2.6. — *Soit X une variété projective de dimension* 3 *non minimale. Alors X admet une structure de Poisson quasi-régulière non nulle si et seulement si $X = S \times \mathbb{P}^1$ où S est une surface* K3, *ou bien X possède une fibration en droites projectives munie d'une connexion plate, de base une surface abélienne S.*

En outre, la structure de Poisson est régulière et induite par le pull-back de la structure symplectique sur S au moyen de la connexion.

3. Cas où X est minimale et $\kappa(X) = 0$

Remarques 3.1. — La formule numérique donnant la dimension de Kodaira entraîne $c_1(X) \equiv 0$. La variété X étant de dimension de Kodaira $\kappa(X) = 0$, il existe donc un entier $n \geq 1$ tel que

$$\omega_X^{\otimes n} = \mathcal{O}_X.$$

Réciproquement, si le fibré canonique est de torsion, X est minimale et $\kappa(X) = 0$.

Rappelons quelques résultats utiles pour ce pargraphe.

Théorème 3.2 (voir [Ka2]). — *Soit X une variété projective lisse minimale de dimension de Kodaira $\kappa(X) = 0$.*

1) *Le morphisme d'Albanese $X \xrightarrow{\alpha_X} \mathrm{Alb}(X)$ est surjectif, à fibres lisses et connexes ; il existe un revêtement étale galoisien trivialisant la fibration précédente.*

2) *Il existe un isomorphisme naturel $H^0(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathcal{O}_X)$.*

Dans la suite de notre travail, l'entier $h^1(X, \mathcal{O}_X)$ sera noté $q(X)$.

Proposition 3.3. — *Soit X une variété projective minimale de dimension de Kodaira $\kappa(X) = 0$.*

1) *Les champs de vecteurs non nuls sur X ne sont pas tangents à la fibration d'Albanese de X.*

2) $q(X) \in \{0, 1, 2, 3\}$ *et si* $q(X) = 3$ *alors X est une variété abélienne.*

Démonstration. — Considérons la suite exacte de cohomologie :

$$H^0(X, \mathcal{T}_{X/\mathrm{Alb}(X)}) \hookrightarrow H^0(X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow H^0(X, \alpha_X^* \mathcal{T}_{\mathrm{Alb}(X)}).$$

L'espace $H^0(X, \mathcal{T}_{X/\mathrm{Alb}(X)})$ est donc nul si et seulement si l'application $H^0(X, \mathcal{T}_X) \to H^0(X, \alpha_X^* \mathcal{T}_{\mathrm{Alb}(X)})$ est surjective, puisque ces deux espaces vectoriels ont même dimension, la dimension de la variété d'Albanese étant précisément $q(X)$.

Soit $B \xrightarrow{r} \mathrm{Alb}(X)$ un revêtement étale galoisien de groupe G tel que le produit fibré $B \times_{\mathrm{Alb}(X)} X$ soit isomorphe au-dessus de B au produit $B \times F$ où F est une variété projective lisse, de sorte que X est isomorphe au quotient $B \times F/G$. Remarquons que, puisque $B/G \cong \mathrm{Alb}(X)$ est une variété abélienne, le groupe G est formé de translations de B. Soit donc $\theta_0 \in H^0(\mathrm{Alb}(X), \mathcal{T}_{\mathrm{Alb}(X)})$ et posons

$$\theta_1 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g_* \theta_0 \in H^0(B \times F, \mathcal{T}_{B \times F})^G = H^0(X, \mathcal{T}_X),$$

où nous avons identifié les espaces $H^0(\mathrm{Alb}(X), \mathcal{T}_{\mathrm{Alb}(X)})$ et $H^0(B, \mathcal{T}_B)$. Le groupe G agissant de manière compatible sur B et $B \times F$, l'image de θ_1 par l'application $H^0(X, \mathcal{T}_X) \to H^0(\mathrm{Alb}(X), \mathcal{T}_{\mathrm{Alb(X)}})$ est θ_0, ce qui prouve notre assertion.

L'inégalité $q(X) \leq 3$ résulte de la surjectivité du morphisme d'Albanese (th. 3.2). La dernière assertion étant évidente, la preuve de notre proposition est achevée. $\square$

Proposition 3.4. — *Soit X une variété projective de dimension* 3 *et de dimension de Kodaira $\kappa(X) = 0$. Supposons en outre que X soit munie d'une structure de Poisson quasi-régulière non nulle. Alors $q(X) \neq 0$ et la structure est régulière. En outre, si $q(X) = 1$ alors le fibré canonique est trivial.*

Démonstration. — Rappelons que X est minimale (lemme 2.1) et démontrons la première assertion. L'incusion $\omega_X \subset \Omega_X^1$ entraîne l'inégalité

$$h^0(X, \omega_X) \leq h^0(X, \Omega_X^1).$$

Par dualité de Serre,

$$h^0(X,\omega_X)=h^3(X,\mathcal{O}_X)$$

et par la théorie de Hodge,

$$h^0(X,\Omega^1_X)=q(X).$$

On obtient $h^3(X,\mathcal{O}_X)\le q(X)$. Or, par le théorème de Riemann-Roch,

$$\chi(\mathcal{O}_X)=\frac{1}{24}c_1(X)c_2(X)=0$$

(on a $c_1(X)\equiv 0$ par la remarque 3.1). Il en résulte finalement la relation $1+h^2(X,\mathcal{O}_X)\le 2q(X)$ qui permet de conclure.

Montrons maintenant que la structure est régulière. Soit σ appartenant à $H^0(X,\overset{2}{\wedge}\mathcal{T}_X)$ la section définissant la structure de Poisson sur X. Le lieu Z des zéros de σ étant de codimension 3, on a

$$c_3(\overset{2}{\wedge}\mathcal{T}_X)=\deg(Z).$$

Or, $c_3(\overset{2}{\wedge}\mathcal{T}_X)=c_1(X)c_2(X)-c_3(X)$ et on a donc la formule

$$\deg(Z)=c_1(X)c_2(X)-c_3(X)=-c_3(X)=-e(X).$$

Mais, puisque le morphisme d'Albanese $X\xrightarrow{\alpha_X}\mathrm{Alb}(X)$ est lisse, il est particulier topologiquement localement trivial et donc $e(X)=0$ puisque $q(X)\ne 0$. Il en résulte $\deg(Z)=0$, ce qui démontre l'assertion.

Supposons enfin $q(X)=1=\dim(\mathrm{Alb}(X))$. Par la proposition 3.3, $h^0(X,\mathcal{T}_{X/\mathrm{Alb}(X)})=0$ et la suite exacte :

$$0\to\overset{2}{\wedge}\mathcal{T}_{X/\mathrm{Alb}(X)}=\omega_X^{-1}\longrightarrow\overset{2}{\wedge}\mathcal{T}_X\longrightarrow\mathcal{T}_{X/\mathrm{Alb}(X)}\to 0$$

fournit donc l'égalité $h^0(X,\omega_X^{-1})=h^0(X,\overset{2}{\wedge}\mathcal{T}_X)$. Or $h^0(X,\overset{2}{\wedge}\mathcal{T}_X)\ge 1$ et donc $h^0(X,\omega_X^{-1})\ge 1$. Le diviseur $-K_X$ étant effectif et numériquement trivial (rem. 3.1), il est nul, ce qui termine la preuve de la proposition. ∎

Proposition 3.5. — *Soit X une variété projective de dimension* 3, *à fibré canonique trivial, vérifiant $q(X)=1$. La variété X vérifie alors l'une des conditions suivantes* :

1) *$X=(C\times S)/G$ où C est une courbe elliptique, S une surface* K3 *et G un groupe fini de translations de C opérant sur S en respectant la structure symplectique,*

2) $X = (C \times S)/G$ *où* C *est une courbe elliptique,* S *une surface abélienne et* G *un groupe fini de translations de* C *opérant sur* $C \times S$ *par la formule :*

$$g \cdot (c, s) = \big(g \cdot c, t_g(c) + u_g(s)\big), \quad g \in G,\ c \in C,\ s \in S,$$

où u_g *est un automorphisme de groupes respectant la structure symplectique de* S *et* t_g *une fonction régulière sur* C *à valeurs dans* S.

De plus, toute variété du type précédent admet une structure de Poisson régulière, induite par la structure symplectique de S.

Démonstration. — Le morphisme d'Albanese $X \xrightarrow{\alpha_X} \mathrm{Alb}(X)$ étant lisse (th. 3.2), on a l'inclusion de fibrés vectoriels :

$$(\alpha_X)^* \omega_{\mathrm{Alb}(X)} = \mathcal{O}_X \hookrightarrow \Omega^1_X.$$

Puisque le fibré canonique ω_X est trivial, cette application définit une structure de Poisson régulière sur X (lemme 1.1) dont les feuilles symplectiques sont les fibres du morphisme d'Albanese.

Nous savons qu'il existe un revêtement étale galoisien de groupe G, $C \to \mathrm{Alb}(X)$ tel que $C \times_{\mathrm{Alb}(X)} X$ soit isomorphe à $C \times F$ au-dessus de C, où F est une surface projective lisse ; de sorte que X est isomorphe au quotient $C \times F/G$, G opérant sur $C \times F$ et C de manière compatible. Puisque $\omega_X = \mathcal{O}_X$, on a $\omega_{C\times F} = \mathcal{O}_{C\times F}$ et donc $\omega_F = \mathcal{O}_F$. La variété F est donc une surface abélienne ou une surface K3. Puisque $C/G = \mathrm{Alb}(X)$ est une variété abélienne, le groupe G est formé de translations de C. Remarquons alors que la structure de Poisson que nous venons de construire sur X se relève à $C \times F$ en une structure de Poisson régulière qui est le produit de la structure nulle sur C et d'une structure symplectique sur F. Pour s'en convaincre, il suffit d'examiner le feuilletage défini par ladite structure. On constate ensuite que le groupe G respecte la structure de Poisson sur $C \times F$. Enfin, la structure de l'action de G résulte du fait que le groupe des automorphismes d'une surface K3 ainsi que le groupe des automorphismes de groupes d'une surface abélienne sont discrets. Un calcul permet de vérifier que la stucture symplectique sur F est respectée, ce qui achève la preuve de notre proposition, puisque la dernière assertion est évidente. □

Proposition 3.6. — *Soit* X *une variété projective minimale de dimension* 3 *et de dimension de Kodaira* $\kappa(X) = 0$, *vérifiant* $q(X) = 2$. *Alors* X *est de la forme* $(F \times S)/G$ *où* F *est une courbe elliptique,* S *une surface abélienne et* G *un groupe fini de translations de* S *opérant sur* F *de sorte que* $F/G = \mathbb{P}^1$ *et sur* $F \times S$ *par le produit de ses actions sur chacun des facteurs.*

De plus, toute variété de cette forme admet une structure de Poisson régulière non nulle, induite par la structure symplectique de S.

Démonstration. — Soit $S \to \mathrm{Alb}(X)$ un revêtement étale galoisien de groupe G tel que le produit fibré $X \times_{\mathrm{Alb}(X)} S$ soit isomorphe au-dessus de S au produit $F \times S$, F étant une courbe lisse, de sorte que X est isomorphe au quotient $F \times S/G$, G opérant sur $F \times S$ et S de manière compatible. L'égalité $\kappa(X) = 0$ entraîne $\kappa(F \times S) = 0$. Aussi $\kappa(F) = 0$ et F est une courbe elliptique. Remarquons que, puisque $S/G \cong \mathrm{Alb}(X)$ est une variété abélienne, le groupe G est formé de translations de S. Utilisant un lemme de Beauville (*cf.* [Be1, lemme VI 10], l'argument donné dans le cas des surfaces s'adapte facilement à notre situation), on peut toujours supposer que le groupe G opère sur la courbe elliptique F et que l'action de G sur le produit $F \times S$ est le produit des actions de G sur F et S. Enfin, si F/G est une courbe elliptique, alors G opère sur F par translations et il en résulte que X est une variété abélienne, ce qui impossible puisque $q(X) = 2$.

La dernière assertion étant immédiate, notre proposition est démontrée. $\square$

Nous avons donc prouvé le théorème suivant :

Théorème 3.7. — *Soit X une variété projective de dimension 3 et de dimension de Kodaira $\kappa(X) = 0$. Alors X admet une structure de Poisson régulière non nulle si et seulement si X est minimale et vérifie l'une des trois conditions suivantes* :

1) $q(X) = 3$ (*auquel cas X est un variété abélienne*),
2) $q(X) = 2$,
3) $q(X) = 1$ *et* $p_g(X) = 1$.

4. Cas où X est minimale et $\kappa(X) = 1$

Les propositions 4.5 et 4.6 sont dues à M. Reid [R] dans le cas où $\dim(X) = 2$.

Lemme 4.1. — *Soient S un schéma intègre, E un faisceau localement libre sur X, $L, \overline{L} \subset E$ deux faisceaux inversibles tels que le quotient $E/\overline{L}$ soit sans torsion, et tels qu'il existe un ouvert $U \subset X$ non vide au dessus duquel $L_{|U} \subset \overline{L}_{|U} \subset E_{|U}$. Alors $L \subset \overline{L} \subset E$.*

Lemme 4.2. — *Soient X une variété localement factorielle, E un faisceau localement libre sur X et $L \subset E$ un sous-faisceau inversible de E. Il existe alors un unique faisceau inversible $\overline{L} \subset E$ tel que $L \subset \overline{L} \subset E$ et tel que le faisceau quotient $E/\overline{L}$ soit sans torsion.*

DÉFINITION 4.3. — Soient X une variété algébrique, C une courbe et $X \xrightarrow{f} C$ un morphisme. On définit le diviseur de ramification de f par la formule :

$$D_f = \sum_{P \in C} f^*P - (f^*P)_{\mathrm{red}}$$

qui a un sens par le théorème de lissité générique.

LEMME 4.4. — *Soit X une variété algébrique. Supposons qu'il existe un morphisme surjectif $X \xrightarrow{f} C$ vers une courbe lisse C. Alors l'inclusion naturelle $f^*\omega_C \subset \Omega^1_X$ fournit l'inclusion*

$$L = f^*\omega_C(D_f) \subset \Omega^1_X,$$

D_f étant le diviseur de ramification de f. De plus, le quotient Ω^1_X/L est sans torsion, et on a l'égalité $f_*L = \omega_C$.

Démonstration. — Soient $P \in C$ un point de C et $f^*P = \sum_i n_i D_i$ la décomposition schématique de la fibre de f au dessus de P. Fixons i. Au voisinage d'un point régulier de la composante D_i, il existe des coordonnées locales $(z_1, \ldots, z_n)$ sur X (le point considéré ayant pour coordonnées $(0, \ldots, 0)$) et une coordonnée locale t sur C au voisinage du point $f(P)$ (ayant pour coordonnée $t = 0$) telles que le morphisme f soit donné par $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto z_1^{n_i}$. On a donc

$$f^*\,\mathrm{d}t = n_i z_1^{n_i - 1}\,\mathrm{d}z_1$$

et la première assertion est claire.

Il reste à établir la relation $f_*L = \omega_C$. Nous allons vérifier que l'inclusion naturelle $\omega_C \subset f_*L$ est un isomorphisme en le montrant en chaque point de C. En un point de C au dessus duquel la fibre est réduite, le résultat est clair. Prenons donc $P \in C$ tel que la fibre schématique f^*P soit non réduite. Les inclusions

$$f^*\omega_C \subset L \subset f^*\omega_C(P)$$

fournissent, en prenant les images directes, les inclusions

$$\omega_C \subset f_*L \subset \omega_C(P).$$

Une section au voisinage de P de $\omega_C(P)$ qui n'appartient pas à ω_C engendre nécessairement $\omega_C(P)$ en P et correspond à un élément de $f^*\omega_C(P)$ dont le diviseur des zéros au voisinage de $f^{-1}(P)$ est f^*P. Cette section ne peut donc appartenir à L, ce qui permet de conclure. ∎

PROPOSITION 4.5. — *Soient X une variété projective et $L \subset \Omega^1_X$ un sous faisceau inversible de Ω^1_X tel que le faisceau quotient Ω^1_X/L soit sans torsion. On suppose qu'il existe un système linéaire $\Lambda \subset |L|$ sans points bases tel que $\phi(X)$ soit une courbe, où $X \xrightarrow{\phi} \mathbb{P}^N$ est le morphisme associé au système linéaire Λ. Alors il existe un morphisme surjectif, à fibres connexes $X \xrightarrow{f} C$ vers une courbe lisse C, tel que*

$$f^*\omega_C \subset L \subset \Omega^1_X,$$

où l'inclusion $f^*\omega_C \subset \Omega^1_X$ est l'inclusion naturelle. En outre, on a l'égalité

$$L = f^*\omega_C(D_f),$$

D_f étant le diviseur de ramification de f, et $f_*L = \omega_C$.

Démonstration. — Remarquons que, supposant l'existence d'un tel morphisme, l'application naturelle

$$f^*\omega_C \xrightarrow{\mathrm{d}f} \Omega^1_X$$

est une inclusion. En effet, par le théorème de lissité générique, le noyau de ce morphisme est de torsion et, puisque $f^*\omega_C$ est sans torsion, ce noyau est trivial.

Par le théorème de factorisation de Stein, il existe une courbe C lisse et connexe, un morphisme $X \xrightarrow{f} C$ surjectif et à fibres connexes, et un morphisme $C \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^N$, fini au-dessus de $\phi(X)$ tels que $\phi = \pi f$. Soient H_0 et H_1 deux hyperplans de $\mathbb{P}^N$ distincts, ne contenant pas la courbe $\phi(X)$ et d'équations respectives $X_1 = 0$ et $X_2 = 0$ avec $X_i \in H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$. Il existe alors un ouvert de Zariski $U \subset \mathbb{P}^N$ tel que la 1-forme $\mathrm{d}(X_1/X_0)$ y soit holomorphe, partout non nulle et tel que $\pi^*\mathrm{d}(X_1/X_0)$ soit partout non nulle sur $\pi^{-1}(U)$, de sorte que $\phi^*\mathrm{d}(X_1/X_0)$ engendre $f^*\omega_C$ au dessus de l'ouvert $\phi^{-1}(U)$. Posons alors

$$s_i = \phi^* X_i \in H^0(X, L).$$

On a donc

$$s_1 = \phi^*\Big(\frac{X_1}{X_0}\Big) \wedge s_0.$$

La variété X étant compacte kählérienne, toute 1-forme holomorphe sur X est fermée. Par suite,

$$\mathrm{d}s_1 = \phi^*\mathrm{d}\Big(\frac{X_1}{X_0}\Big) \wedge s_0 = 0.$$

Par choix de H_0, le fermé $\phi^{-1}(H_0)$ est un diviseur et donc un fermé propre de X. Il en résulte alors que

$$\phi^* \mathrm{d}\Big(\frac{X_1}{X_0}\Big)_{|V} \in H^0(V, L)$$

où $V = \phi^{-1}(U \cap (\mathbb{P}^N/H_0))$. Mais, puisque $\phi^* \mathrm{d}(X_1/X_0)_{|V}$ engendre $f^*\omega_{C|V}$ en tout point de V, il en résulte les inclusions $f^*\omega_C \subset L \subset \Omega^1_X$, où l'inclusion $f^*\omega_C \subset \Omega^1_X$ est l'inclusion naturelle (*cf.* lemme 4.1).

Par le lemme 4.2, il suffit de prouver que $f^*\omega_C(D_f) \subset \Omega^1_X$ et que le faisceau quotient $\Omega^1_X/f^*\omega_C(D_f)$ est sans torsion pour que l'égalité $L = f^*\omega_C(D_f)$ soit vérifiée, ce que donne le lemme 4.4. ∎

Proposition 4.6. — *Soient X une variété projective et $L \subset \Omega^1_X$ un faisceau inversible tel que le faisceau quotient Ω^1_X/L soit sans torsion. On suppose qu'il existe un entier $n \geq 2$ et un système linéaire $\Lambda \subset |L^{\otimes n}|$ sans points bases tel que $\phi(X)$ soit une courbe, où $X \xrightarrow{\phi} \mathbb{P}^N$ est le morphisme associé au système linéaire Λ. Alors il existe un morphisme surjectif, à fibres connexes $X \xrightarrow{f} C$ vers une courbe lisse, tel que*

$$f^*\omega_C \subset L \subset \Omega^1_X,$$

où l'inclusion $f^*\omega_C \subset \Omega^1_X$ est l'inclusion naturelle. En outre, on a l'égalité

$$L = f^*\omega_C(D_f),$$

D_f étant le diviseur de ramification de f, et $f_*L = \omega_C$.

Démonstration. — Soient $(s_0, \cdots, s_N)$ une base du système linéaire Λ. Il existe un morphisme projectif, génériquement fini,

$$Y \xrightarrow{\pi} X,$$

Y étant une variété algébrique, et des sections $t_1, \ldots, t_N$ du fibré π^*L telles que

$$t_i^n = \pi^* s_i$$

(voir [BPV]). Notons $\overline{\Lambda} \subset |\pi^*L|$ le système linéaire engendré par les sections t_i. Ce système linéaire est sans points bases puisque π est surjectif et, si $\bar{\phi}$ désigne le morphisme associé à Λ, alors $\bar{\phi}(X)$ est une courbe. L'inclusion $L \subset \Omega^1_X$ se relève en une inclusion

$$\pi^*L \subset \pi^*\Omega^1_X,$$

et l'injection naturelle $\pi^*\Omega^1_X \hookrightarrow \Omega^1_Y$ fournit alors un sous faisceau inversible $\pi^*L \subset \Omega^1_Y$ de Ω^1_Y, le faisceau quotient Ω^1_Y/π^*L n'étant pas nécessairement sans torsion.

Considérons alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\qquad\pi\qquad} & X \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ D & & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^N & \xrightarrow{\qquad\qquad} & \mathbb{P}^N \\ (x_0 : \cdots : x_N) & \longmapsto & (x_0^n : \cdots : x_N^n) \end{array}$$

où les flèches de gauche sont données par la proposition 4.5 appliquée au système linéaire $\overline{\Lambda} \subset |\overline{\pi^* L}|$, les notations étant celles du lemme 4.2, et les flèches de droite par cette même proposition appliquée au système linéaire $\Lambda \subset |L^{\otimes n}|$. Remarquons enfin que l'inclusion $f^*\omega_C \subset L$ est équivalente à la condition qu'en un point assez général (pour la topologie de Zariski) de X, les fibres de f sont tangentes au feuilletage défini par L. D'après la proposition 4.5, nous savons que $g^*\omega_D$ et $\pi^* L$ coïncident sur un ouvert non vide de Y et donc que les fibres de g sont tangentes au feuilletage défini par $\pi^* L$. Comme le diagramme est commutatif, on en déduit qu'en un point générique de X, les fibres de f sont tangentes au feuilletage défini par L, ce qui permet de conclure.

Les deux dernières égalités résultent du lemme 4.4. ∎

Rappelons enfin le lemme suivant qui nous sera utile par la suite.

Lemme 4.7 (voir [Be1, lemme VI 7 bis]). — *Soient $\Delta \subset \mathbb{C}$ le disque unité, U une variété analytique (non compacte) lisse de dimension 3 et $p : U \to \Delta$ un morphisme. On suppose que $p^*0 = nD$ où $n \geq 1$ et D est un diviseur effectif réduit. Soient $\Delta \xrightarrow{q} \Delta$ le morphisme $z \mapsto z^n$ et $\widetilde{U}$ le produit fibré défini par le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{U} & \xrightarrow{\ \tilde{q}\ } & U \\ {\scriptstyle \tilde{p}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \Delta & \xrightarrow{\ q\ } & \Delta. \end{array}$$

Soient $\overline{U}$ la normalisation de $\widetilde{U}$, $\bar{p}$ et $\overline{q}$ les projections de $\overline{U}$ sur Δ et U. Alors, $\overline{U}$ est lisse, $\bar{q}$ est étale fini et la fibre $\overline{p}^*0$ est réduite.

Proposition 4.8. — *Soit X une variété projective de dimension 3 munie d'une structure de Poisson quasi-régulière non nulle ; on suppose que X est de dimension de Kodaira $\kappa(X) = 1$. Alors il existe un* *morphisme surjectif* $X \xrightarrow{f} C$ *vers une courbe* C, *dont les fibres lisses sont des surfaces* K3 *ou des surfaces abéliennes. Si l'une des fibres est une surfaces* K3, *le morphisme* f *est lisse*, *analytiquement localement trivial et on a la formule*

$$\omega_X = f^*\omega_C.$$

Si l'une des fibres est une surface abélienne, *les fibres lisses sont des surfaces abéliennes et les fibres non lisses sont multiples de surfaces abéliennes et on a l'égalité*

$$\omega_X = f^*\omega_C(D_f),$$

D_f *étant le diviseur de ramification de* f. *Enfin*, *la structure de Poisson est régulière.*

Démonstration. — La variété X étant minimale (lemme 2.1), le système linéaire $|K_X|$ est semi-ample (*cf.* [Ka2]). L'existence d'un morphisme $X \xrightarrow{f} C$ surjectif, à fibres connexes, vers une courbe lisse tel que $f^*\omega_C(D_f) = \omega_X$, D_f étant le diviseur de ramification de f, résulte du corollaire 1.2 et de la proposition 4.6.

Montrons que les fibres ensemblistes du morphisme f sont normales. La formule $\omega_X = f^*\omega_C(D_f)$ entraîne que les fibres lisses sont des feuilles symplectiques pour la distribution définie par la structure de Poisson. Il en résulte que toutes les feuilles symplectiques de dimension 2 sont verticales pour f. Aussi, les singularités des fibres de f correspondent aux points où la structure n'est pas régulière, ce qui prouve l'assertion. Il en résulte en particulier que les fibres du morphisme f sont irréductibles puisqu'elles sont connexes.

Si F désigne une fibre lisse de f, la formule d'adjonction fournit l'égalité $\omega_F = \omega_{X|F}$ et donc $\omega_F = \mathcal{O}_F$ puisque $\mathcal{O}_F(D_f) = \mathcal{O}_F$ dans ce cas. Par suite, F est une surface K3 ou une surface abélienne.

Supposons maintenant que l'une des fibres de f soit une surface K3. Pour toute fibre F de f, on a donc $\chi(\mathcal{O}_F) = 2$. Supposons que la fibre schématique F soit non réduite. On peut donc écrire

$$F = n(F_{\mathrm{red}}) \quad \text{avec} \quad n \geq 2.$$

À l'aide du théorème de Riemann Roch, il n'est pas difficile de voir que

$$\chi(\mathcal{O}_F) = n\chi(\mathcal{O}_{F_{\mathrm{red}}}).$$

En outre, par la formule d'adjonction, on a

$$\begin{aligned} \omega^0_{F_{\mathrm{red}}} &= \omega_X \otimes \mathcal{O}_X(F_{\mathrm{red}}) \otimes \mathcal{O}_{F_{\mathrm{red}}} \\ &= f^*\omega_C(D_f + F_{\mathrm{red}}) \otimes \mathcal{O}_{F_{\mathrm{red}}} \\ &= f^*\omega_C(n(F_{\mathrm{red}})) \otimes \mathcal{O}_{F_{\mathrm{red}}} \\ &= \mathcal{O}_{F_{\mathrm{red}}} \end{aligned}$$

car $n(F_{\mathrm{red}}) = F$. Or, une surface projective normale S dont le faisceau dualisant est trivial vérifie $h^1(S,\mathcal{O}_S) = 0$ sauf si S est une surface abélienne (*cf.* [U, cor. 1]). Par suite $\chi(\mathcal{O}_{F_{\mathrm{red}}}) = 2$ et donc $n = 1$. Aussi, le morphisme f est non ramifié et on a la formule $\omega_X = f^*\omega_C$. Le fibré dualisant relatif étant de torsion, le morphisme f est lisse et analytiquement localement trivial (*cf.* [F, th. 4.8]), ce que l'on voulait démontrer. En outre, la structure de Poisson est régulière puisque, comme nous l'avons déjà remarqué, les points où la structure n'est pas régulière correspondent aux singularités des fibres de f.

Supposons maintenant que l'une des fibres de f soit une surface abélienne. Par un résultat de J.Kollár (*cf.* [Ko, preuve du th. 2.2, étape 6]), le faisceau $R^1f_*\mathcal{O}_X$ est localement libre de rang 2 et sa formation commute aux changements de base. Une fibre réduite F de f vérifie donc $h^1(F,\mathcal{O}_F) = 2$ et est donc lisse par le résultat de Y. Umezu (*cf.* [U, cor. 1]) puisque son faisceau dualisant relatif est trivial. Si F est une fibre de f non réduite, on pose $F = n(F_{\mathrm{red}})$ et $P = f(F)$. Choisissons une boule $\Delta \subset C$ contenant le point P et posons $U = f^{-1}(\Delta)$. On suppose que P est le seul point de Δ au dessus duquel la fibre est non réduite. En appliquant le lemme 4.7, on obtient alors un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \overline{U} \arrow[r, "\bar{q}"] \arrow[d, "\bar{f}"'] & U \arrow[d, "f"] \\ \Delta \arrow[r, "z\mapsto z^{n_i}"] & \Delta \end{tikzcd}$$

où $\bar{q}$ est un revêtement étale fini et $\bar{f}$ est à fibres réduites et connexes. Il n'est pas difficile de voir que

$$\bar{q}^*\omega_U = \bar{f}^*\omega_\Delta$$

puisque nous avons la relation $\omega_X = f^*\omega_C(D_f)$. Le morphisme $\bar{q}$ étant étale on a $\bar{q}^*\omega_U = \omega_{\overline{U}}$ et donc

$$\omega_{\overline{U}} = \bar{f}^*\omega_\Delta$$

de sorte que les fibres de $\bar{f}$ ont toutes un faisceau dualisant trivial. Enfin, puisque la formation du faisceau $R^1f_*\mathcal{O}_X$ commute aux changements de base, on en déduit que toutes les fibres $\overline{F}$ de $\bar{f}$ vérifient $h^1(\overline{F},\mathcal{O}_{\overline{F}}) = 2$ ce qui implique encore par le résultat de Y. Umezu (*cf.* [U, cor. 1]) que ces fibres sont lisses. On en déduit que les fibres singulières de f sont multiples de surfaces lisses. Or, nous savons que les singularités des fibres du morphisme f (munies de leurs structures réduites) correspondent aux singularités de l'injection de faisceaux $\omega_X \hookrightarrow \Omega^1_X$ (*cf.* corollaire 1.2), ce qui prouve que la structure de Poisson est régulière. Enfin, il n'est pas difficile de voir que le fibré canonique $\omega_{F_{\mathrm{red}}}$ est trivial pour toute fibre F de f, de sorte que, pour des raisons de caractéristique d'Euler-Poincaré, les fibres de f sont soit des surfaces abéliennes, soit des multiples de surfaces abéliennes. $\square$

Les deux propositions qui suivent complètent naturellement les résultats de la proposition précédente.

Proposition 4.9. — *Soit X une variété projective de dimension 3. On suppose qu'il existe un morphisme surjectif $X \xrightarrow{f} C$ vers une courbe algébrique C dont les fibres sont soit des surfaces abéliennes, soit multiples de surfaces abéliennes. Enfin, on suppose qu'on a la formule $\omega_X = f^*\omega_C(D_f)$, D_f étant le diviseur de ramification de f. Alors X est de la forme $(\overline{C} \times S)/G$ où $\overline{C}$ est une courbe lisse, S une surface abélienne et $G \subset \mathrm{Aut}(\overline{C})$ un groupe fini opérant librement sur $\overline{C} \times S$ par la formule :*

$$g \cdot (c, s) = \big(g \cdot c, t_g(c) + u_g(s)\big), \quad g \in G,\ c \in \overline{C},\ s \in S,$$

où u_g est un automorphisme de groupes de S respectant la structure symplectique et t_g une fonction régulière sur $\overline{C}$ à valeurs dans S.

De plus, toute variété de cette forme admet une structure de Poisson régulière non nulle induite par la structure symplectique de S.

Démonstration. — Démontrons la première assertion. Notons $P_1, \dots, P_k$ les points de C tels que les fibres schématiques f^*P_i soient non réduites et $n_1, \dots, n_k$ les multiplicités desdites fibres. Il existe un revêtement galoisien $\overline{C} \xrightarrow{\pi} C$ ($\overline{C}$ étant une courbe projective) ramifié au dessus des points P_i, étale ailleurs et tel que l'indice de ramification d'un point de $\pi^{-1}(P_i)$ soit n_i (*cf.* [KO, lemme 6.1]). Toutefois, il faut vérifier que lorsque $C = \mathbb{P}^1$, le morphisme f a au moins trois fibres non réduites. Notons N le nombre de fibres non réduites et soit $k \geq 1$ un entier. En utilisant la formule de projection, on obtient :

$$\begin{aligned} h^0\Big(X, \omega_X^{\otimes k\Pi_i n_i}\Big) &= h^0\Big(C, \omega_C^{\otimes k\Pi_i n_i} \otimes f_*\mathcal{O}_X\Big(k\prod_i n_i D_f\Big)\Big) \\ &= h^0\Big(C, \omega_C^{\otimes k\Pi_i n_i} \otimes \mathcal{O}_C\Big(\sum_i (n_i - 1)\Big(\prod_{j\neq i} n_j\Big)P_i\Big)\Big). \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \deg\Big(\omega_C^{\otimes k\Pi_i n_i} \otimes \mathcal{O}_C\Big(\sum_i (n_i - 1)\Big(\prod_{j\neq i} n_j\Big)P_i\Big)\Big) & \\ = k\Big((N-2)\prod_i n_i - \sum_i \prod_{j\neq i} n_j\Big),& \end{aligned}$$

et on en déduit que $N \geq 3$, puisque $\kappa(X) = 1$.

Soit $\overline{X}$ la normalisation du produit fibré $X \times_C \overline{C}$. Le morphisme naturel $\overline{X} \xrightarrow{\bar{f}} \overline{C}$ est lisse, et le morphisme $\overline{X} \xrightarrow{\bar{\pi}} X$ est un revêtement étale fini (lemme 4.7). La formule $\omega_X = f^*\omega_C(D_f)$ entraîne l'égalité $\omega_{\overline{X}} = \bar{f}^*\omega_{\overline{C}}$ et le morphisme $\bar{f}$ est donc localement trivial (*cf.* [F, th. 4.8]). Fixons un entier $n \geq 3$. Quitte à faire une changement de base étale, on peut supposer que la fibration $\overline{X} \to \overline{C}$ est un schéma en groupes abéliens muni d'une structure de niveau n. La fibration étant localement triviale (pour la topologie analytique), l'existence d'un espace de modules fin pour les surfaces abéliennes munies d'une polarisation de degré donné et d'une structure de niveau n, permet de conclure à la trivialité de ladite fibration. La variété $\overline{X}$ est donc isomorphe, au-dessus de $\overline{C}$, au produit $\overline{C} \times S$ où S est une surface abélienne. Remarquons enfin que le revêtement $\overline{C} \to C$ est galoisien et que son groupe G agit naturellement sur $\overline{X} = \overline{C} \times S$ de manière compatible à son action sur $\overline{C}$.

Montrons que X peut être munie d'une structure de Poisson régulière non nulle. Le conoyau $\mathcal{F}$ de l'injection de faisceaux

$$\omega_X \cong f^*\omega_C(D_f) \hookrightarrow \Omega^1_X$$

s'identifie, après le revêtement étale $\overline{X} \to X$, au fibré $\Omega^1_{\overline{X}/\overline{C}}$. Le faisceau $\mathcal{F}$ est donc localement libre de rang 2 et détermine une structure de Poisson régulière non nulle dont les feuilles symplectiques sont les fibres du morphisme f.

Prenons $g \in G$ et $(c, s) \in \overline{C} \times S$. Il n'est pas difficile de voir que $g \cdot (c, s) = (g \cdot c, t_g(c) + u_g(s))$ où u_g est un automorphisme de groupes et t_g est une fonction régulière sur $\overline{C}$ à valeurs dans S. Remarquons alors que la structure de Poisson que nous avons construite sur X se relève en une structure de Poisson sur $\overline{X}$ qui est produit de la structure symplectique sur S et de la structure nulle sur $\overline{C}$ et que les automorphismes du revêtement $\overline{X} \to X$ sont des morphismes de Poisson. Un calcul montre alors que les éléments u_g respectent la structure symplectique sur S, ce qui est l'assertion souhaitée. L'assertion réciproque est immédiate. ∎

Proposition 4.10. — *Soit X une variété projective de dimension* 3. *On suppose qu'il existe un morphisme surjectif et lisse $X \xrightarrow{f} C$ vers une courbe algébrique C, dont les fibres sont des surfaces* K3. *On suppose en outre qu'on a la formule $\omega_X = f^*\omega_C$. Alors X est de la forme $(\overline{C} \times S)/G$ où $\overline{C}$ est une courbe algébrique, S une surface* K3 *et G un groupe fini opèrant librement sur $\overline{C}$, opérant sur S en respectant la structure symplectique et sur $\overline{C} \times S$ par le produit de ses actions sur chacun des facteurs.*

De plus, toute variété de cette forme admet une structure de Poisson régulière non nulle induite par la structure symplectique sur S.

Démonstration. — Un argument analogue à celui utilisé dans la proposition précédente permet de montrer que la variété X peut être munie d'une structure de Poisson régulière correspondant à l'injection de fibrés vectoriels $\omega_X = f^*\omega_C \hookrightarrow \Omega^1_X$.

Rappelons qu'il existe un espace de modules fin $\mathcal{K}_{d,n}$ pour les surfaces K3 munies d'une polarisation de degré d fixé et d'une trivialisation du système local de fibres $H^2(\,.\,,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ avec $n \geq 3$ fixé, déduit de l'espace de modules fin pour les surfaces K3 marquées (voir [Be3, exposé VIII]). En effet, le groupe des automorphismes projectifs d'une surface K3 est fini et un automorphisme d'ordre fini induisant l'identité sur $H^2(\,.\,,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est l'identité (voir [G, Appendice]).

Puisque le groupe $\mathrm{Aut}(H^2(\,.\,,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est fini, il existe un revêtement étale fini et connexe $\overline{C} \to C$ de C trivialisant le système local précédent. Par suite, il existe un morphisme $\overline{C} \to \mathcal{K}_{d,n}$. Mais, puisque le morphisme f est localement trivial (*cf.* [F, th. 4.8]), ce morphisme est constant et, puisque l'espace de modules est fin, la famille $X \times_C \overline{C}/\overline{C}$ est triviale.

On peut toujours supposer que le revêtement $\overline{C} \to C$ est galoisien de groupe G. On sait que $\overline{C} \times_C X \cong \overline{C} \times S$ où S est une surface K3. Le groupe G agit sur le produit $\overline{C} \times S$ et sur la courbe $\overline{C}$ de manière compatible. Puisque le groupe des automorphismes d'une surface K3 est discret, le groupe G agit en fait sur S et son action sur le produit $S \times \overline{C}$ est finalement le produit de ses actions sur chacun des facteurs. De plus, la structure de Poisson sur X induit une structure de Poisson régulière sur $S \times \overline{C}$. Il n'est pas difficile de voir que sur une telle variété, une structure de Poisson régulière est nécessairement le produit d'une structure symplectique sur S et de la structure triviale sur $\overline{C}$ et que le groupe G respecte la structure symplectique sur S, ce qui termine la preuve de notre proposition, puisque la dernière assertion est évidente. $\square$

Nous avons donc prouvé le théorème :

THÉORÈME 4.11. — *Soit X une variété projective de dimension* 3. *On suppose en outre que X est de dimension de Kodaira $\kappa(X) = 1$. Alors X admet une structure de Poisson quasi-régulière non nulle si et seulement si X appartient à l'une des deux familles suivantes* :

1) $X = (C \times S)/G$ *où C est une courbe de genre au moins 2, S une surface* K3 *et G un groupe fini opérant librement sur C et opérant sur S en respectant la structure symplectique*,

2) $X = (C \times S)/G$ *où C est une courbe de genre au moins* 2, *S une*

surface abélienne et $G \subset \mathrm{Aut}(C)$ *un groupe fini opèrant librement sur* $C \times S$ *par la formule :*

$$g \cdot (c,s) = \big(g \cdot c, t_g(c) + u_g(s)\big), \quad g \in G,\ c \in C,\ s \in S,$$

où u_g *est un automorphisme de groupes de* S *respectant la structure symplectique et* t_g *une fonction régulière sur* C *à valeurs dans* S.

Enfin, X *est alors minimale, la structure de Poisson est régulière et provient de la structure symplectique sur* S.

Remarques 4.12. — Les groupes finis d'automorphismes symplectiques d'une surface K3 ont été classifiés par S. Mukai [Mu] et on dispose donc d'une description assez précise de ces variétés.

BIBLIOGRAPHIE

[BPV] Barth (W.), Peters (C.), Van de Ven (A.). — *Compact complex surfaces.* — Springer-Verlag, 1984.

[Be1] Beauville (A.). — *Surfaces algébriques complexes*, Astérisque **54**, 1978.

[Be2] Beauville (A.). — *Variétés de Prym et Jacobiennes intermédiaires*, Ann. Sci. École Norm. Sup., 4e série, t. **10**, 1977, p. 309–391.

[Be3] Beauville (A.), Bourguignon (J.-P.), Demazure (M.). — *Géométrie des surfaces K3 : modules et périodes*, Astérisque **126**, 1985.

[F] Fujita (T.). — *On Kähler fiber spaces over curves*, J. Math. Soc. Japan, t. **30**, 1978, p. 779–794.

[G] Grothendieck (A.). — *Construction de l'espace de Teichmuller*, Séminaire H. Cartan, t. **13**, 1960–1961.

[H] Hartshorne (R.). — *Algebraic Geometry.* — Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag, 1977.

[Ka1] Kawamata (Y.). — *Minimal models and the Kodaira dimension of algebraic fiber spaces*, J. de Crelle, t. **363**, 1985, p. 1–46.

[Ka2] Kawamata (Y.). — *Pluricanonical systems on minimal algebraic varieties*, Invent. Math., t. **79**, 1985, p. 567–588.

[K-O] Kobayashi (S.), Ochiai (T.). — *Holomorphic structures modeled after hyperquadrics*, Tôhoku Math. J., t. **34**, 1982, p. 587–629.

[Ko] Kollár (J.). — *Higher direct images of dualizing sheaves*, Ann. of Math., t. **123**, 1986, p. 11–42.

[MP] Miyaoka (Y.), Peternell (T.). — *Geometry of Higher Dimensional Algebraic Varieties*. — DMV seminar, vol. **26**, Birkäuser, 1997.

[Mo] Mori (S.). — *Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective*, Ann. of Math., t. **116**, 1982, p. 133–176.

[Mu] Mukai (S.). — *Finite groups of automorphisms of K3 surfaces and the Mathieu group*, Invent. Math., t. **94**, 1988, p. 183–221.

[R] Reid (M.). — *Bogomolov's theorem* $c_1^2 \leq 4c_2$, International Sympos. on Algebraic Geometry, Kyoto, 1977, p. 623–642.

[U] Umezu (Y.). — *On normal projective surfaces with trivial dualizing sheaf*, Tokyo J. Math, t. **4**, 1981, p. 343–354.

[W] Weinstein (A.). — *The local structure of Poisson manifolds*, J. Diff. Geom., t. **18**, 1983, p. 523–557.