Math. Z.
DOI 10.1007/s00209-009-0626-4

Mathematische Zeitschrift

Quelques remarques sur la décomposition de Zariski divisorielle sur les variétés dont la première classe de Chern est nulle

Stéphane Druel

Received: 16 June 2009 / Accepted: 2 November 2009

1 Introduction

Toutes nos variétés sont algébriques et définies sur le corps des nombres complexes. Soit X une variété projective, lisse et connexe. On dit qu'un diviseur effectif D sur X a une décomposition de Zariski s'il existe des $\mathbf{Q}$-diviseurs $P(D)$ et $N(D)$, respectivement numériquement effectif et effectif, tels que

$$D = P(D) + N(D)$$

et tels que l'inclusion

$$\mathrm{H}^0(X, \llcorner mP(D) \lrcorner) \hookrightarrow \mathrm{H}^0(X, \llcorner mD \lrcorner)$$

soit bijective pour tout entier $m \geq 0$. Zariski établit dans [21] l'existence d'une telle décomposition lorsque X est une surface mais Nakayama montre dans [16] qu'en dimension supérieure une telle décomposition n'existe pas toujours même si on autorise une modification de X.

On a quand même, à la suite des travaux de Nakayama [16] et Boucksom [5], une décomposition où la partie positive $P(D)$ est ≪ numériquement effective en codimension 1 ≫ et la partie négative est ≪ rigide ≫; $N(D)$ et $P(D)$ sont *a priori* des $\mathbf{R}$-diviseurs.

On établit dans cette note quelques propriétés de cette décomposition lorsque la première classe de Chern de X est nulle.

Théorème 1.1 *Soit X une variété projective, lisse et connexe avec $c_1(X) = 0$.*

1. *Si D un $\mathbf{R}$-diviseur effectif alors il existe une variété projective, irréductible et normale X' et une application birationnelle $\varphi : X \dashrightarrow X'$ qui contracte les composantes irréductibles de $N(D)$.*
2. *Si D est $\mathbf{Q}$-diviseur grand alors $N(D)$ est un $\mathbf{Q}$-diviseur.*

S. Druel (✉)
Institut Fourier, UMR 5582 du CNRS, Université Joseph Fourier,
BP 74, 38402 Saint Martin d'Hères, France
e-mail: druel@ujf-grenoble.fr
URL: http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~druel/

Published online: 18 November 2009

Springer

On peut bien sûr déduire la première partie de l'énoncé du critère d'Artin (voir [1]) si $\dim(X) = 2$.

Boucksom établit dans [5] la rationalité de la décomposition de Zariski divisorielle si $\dim(X) = 2$ ou encore si X est une variété hyperkählérienne : elle se déduit de l'orthogonalité de cette décomposition relativement à la forme d'intersection dans le premier cas et à la forme de Beauville–Bogomolov dans le second.

On montre en fait, grâce aux travaux de Birkar, Cascini, Hacon et M^cKernan [2,6], l'énoncé plus général suivant.

Théorème 1.2 *Soit* (X, Δ) *une paire klt.*

1. *Si* $K_X + \Delta$ *est un* $\mathbf{R}$*-diviseur pseudo-effectif alors il existe une variété projective, irréductible et normale* X' *et une application birationnelle* $\varphi : X \dashrightarrow X'$ *qui contracte les composantes irréductibles de* $N(K_X + \Delta)$.
2. *Si* $K_X + \Delta$ *est un* $\mathbf{Q}$*-diviseur grand alors* $N(K_X + \Delta)$ *est un* $\mathbf{Q}$*-diviseur.*

On étudie dans la dernière partie de ce texte les diviseurs exceptionnels sur les variétés symplectiques holomorphes. Boucksom a montré que tout diviseur premier exceptionnel sur une variété hyperkählérienne est uniréglé (voir [5, Proposition 4.7]). On sait que cette propriété ne caractérise pas les diviseurs exceptionnels : on peut penser, par exemple, au cas d'une surface $K3$ elliptique générale dont les 24 fibres singulières sont des courbes rationnelles (irréductibles). On obtient le résultat suivant.

Théorème 1.3 *Soient* X *une variété projective, lisse et connexe et* E *un diviseur premier sur* X. *On suppose* X *symplectique. Alors* E *est exceptionnel si et seulement si par un point général de* E *passe une courbe rationnelle* $\ell \subset E$ *avec* $E \cdot \ell < 0$.

On démontre au passage l'énoncé suivant.

Proposition 1.4 *Soient* X *une variété projective, lisse et connexe et* E *un diviseur premier sur* X. *On suppose* X *symplectique et* E *exceptionnel. Il existe alors un morphisme birationnel* $\varphi : X \dashrightarrow X'$ *avec* X' *projective, lisse, connexe et symplectique et un morphisme birationnel* $c' : X' \to Y'$ *avec* Y' *projective et normale dont le lieu exceptionnel est le support du diviseur premier* $E' := \varphi(E)$.

2 Multiplicités asymptotiques et décomposition de Zariski divisorielle

On commence ce paragraphe par quelques rappels sur les multiplicités asymptotiques et la décomposition de Zariski divisorielle. On étudie ensuite quelques propriétés desdites multiplicités.

2.1 Quelques notations

Soit X une variété algébrique projective complexe. On suppose X irréductible et normale.

L'ensemble des diviseurs de Cartier (resp. $\mathbf{Q}$-diviseurs de Weil $\mathbf{Q}$-Cartier, $\mathbf{R}$-diviseurs de Weil $\mathbf{R}$-Cartier) est noté $\mathrm{Div}(X)_{\mathbf{Z}}$ (resp. $\mathrm{Div}(X)_{\mathbf{Q}}$, $\mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$). On rappelle que les diviseurs D_1 et D_2 de $\mathrm{Div}(X)_{\mathbf{Q}}$ (resp. $\mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$) sont dits $\mathbf{Q}$-linéairement équivalents (resp. $\mathbf{R}$-linéairement équivalents) et on note $D_1 \sim_{\mathbf{Q}} D_2$ (resp. $D_1 \sim_{\mathbf{R}} D_2$) s'il existe des fonctions rationnelles u_j non nulles et $r_j \in \mathbf{Q}$ (resp. $r_j \in \mathbf{R}$) pour $j \in J$ fini tels que $D_1 - D_2 = \sum_{j \in J} r_j \operatorname{div}(u_j)$ où $\operatorname{div}(u_j)$ désigne le diviseur des zéros et pôles de u_j.

On note $\mathrm{Z}_1(X)_{\mathbf{Z}}$ le groupe abélien libre engendré par les courbes intègres et complètes contenues dans X. On rappelle que les diviseurs D_1 et D_2 de $\mathrm{Div}(X)_{\mathbf{Q}}$ (resp. $\mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$) sont dits numériquement équivalents et on note $D_1 \equiv_{\mathbf{Q}} D_2$ (resp. $D_1 \equiv_{\mathbf{R}} D_2$) si $D_1 \cdot C = D_2 \cdot C$ pour $C \in \mathrm{Z}_1(X)_{\mathbf{Z}}$.

On note $\mathrm{N}_1(X)$ (resp. $\mathrm{N}^1(X)$) l'espace vectoriel réel $\mathrm{Z}_1(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ (resp. $\mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$) modulo la relation d'équivalence numérique définie ci-dessus.

Le cône convexe fermé de $\mathrm{N}_1(X)$ engendré par les classes des 1-cycles effectifs de $\mathrm{Z}_1(X)_{\mathbf{Z}}$ est noté $\overline{\mathrm{NE}}(X)$.

On note $\mathrm{Pef}(X)$ l'adhérence dans $\mathrm{N}^1(X)$ du cône convexe engendré par les classes des $\mathbf{Q}$-diviseurs de Weil effectifs $\mathbf{Q}$-Cartier. Un élément $D \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ est dit pseudo-effectif si sa classe dans $\mathrm{N}^1(X)$ est dans $\mathrm{Pef}(X)$. L'intérieur du cône $\mathrm{Pef}(X)$ est noté $\mathrm{Big}(X)$. Un élément $D \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ est dit grand ($\ll$ big $\gg$ en anglais) si sa classe dans $\mathrm{N}^1(X)$ est dans $\mathrm{Big}(X)$.

On rappelle enfin qu'un diviseur $D \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbf{Z}}$ est dit mobile si le système linéaire correspondant est non vide et sans composante fixe. On note $\overline{\mathrm{Mob}}(X)$ le sous-cône convexe fermé de $\mathrm{N}^1(X)$ engendré par les classes de diviseurs mobiles. On dit aussi d'un diviseur $D \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ avec $[D] \in \overline{\mathrm{Mob}}(X)$ qu'il est numériquement effectif en codimension 1 ou encore nef en codimension 1.

2.2 La décomposition de Zariski divisorielle

On renvoie le lecteur à [16] (voir également [5]) pour plus de détails.

Soient $D \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ et P un diviseur premier sur X. On suppose $[D] \in \mathrm{Big}(X)$. On définit la multiplicité asymptotique du système linéaire réel

$$|D|_{\mathbf{R}} := \{D' \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}} \text{ effectif tel que } D' \sim_{\mathbf{R}} D\}$$

en P par

$$\nu_P(D) := \inf_{D' \in |D|_{\mathbf{R}}} \mathrm{mult}_P(D') \in \mathbf{R}.$$

On suppose maintenant $[D] \in \mathrm{Pef}(X)$ et on considère un $\mathbf{R}$-diviseur $B \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ avec $[B] \in \mathrm{Big}(X)$. On a $[D + \varepsilon B] \in \mathrm{Big}(X)$ pour tout $\varepsilon > 0$ et on montre que la limite $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \nu_P(D + \varepsilon B)$ existe et ne dépend pas de B, on la note $\nu_D(P)$.

On montre que $\overline{\mathrm{Mob}}(X)$ est l'ensemble des classes des $\mathbf{R}$-diviseurs pseudo-effectifs $D \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ tels que $\nu_P(D) = 0$ pour tout diviseur premier P de X.

On montre également que les nombres $\nu_P(D)$ sont nuls sauf pour un nombre fini de diviseurs premiers P de X. On pose alors

$$N(D) := \sum_{P \text{ diviseur premier}} \nu_P(D) P$$

et

$$P(D) := D - N(D).$$

Le diviseur (effectif) $N(D)$ ne dépend que de la classe de D dans $N^1(X)$ et $P(D) \in \overline{\mathrm{Mob}}(X)$.

L'application obtenue

$$\begin{aligned} \mathrm{Pef}(X) &\longrightarrow \overline{\mathrm{Mob}}(X) \\ [D] &\longmapsto [P(D)] \end{aligned}$$

est concave, homogène de degré 1 et continue sur $\mathrm{Big}(X)$.

Si $[D] \in \mathrm{Big}(X)$ alors la décompostion de Zariski divisorielle est l'unique décomposition en somme de deux $\mathbf{R}$-diviseurs $P(D)$ et $N(D)$ respectivement nef en codimension un et effectif telle que l'application

$$\mathrm{H}^0(X, \llcorner mP(D) \lrcorner) \hookrightarrow \mathrm{H}^0(X, \llcorner mD \lrcorner)$$

soit bijective pour tout entier $m \geq 0$ où $\llcorner D \lrcorner = \sum_{i \in I} \llcorner d_i \lrcorner D_i$ si $D = \sum_{i \in I} d_i D_i$ avec $D_i \neq D_j$ pour $i \neq j$ (voir [5, Theorem 5.5]).

On rappelle enfin qu'un diviseur effectif $E \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ est dit exceptionnel si $N(E) = E$ ou, de façon équivalente, si les classes des composantes irréductibles de E sont linéairement indépendantes dans $\mathrm{N}^1(X)$ et le cône convexe qu'elles engendrent ne rencontre pas $\overline{\mathrm{Mob}}(X)$.

2.3 Quelques propriétés des multiplicités asymptotiques

Soit $\varphi : X \dashrightarrow X'$ une application birationnelle de variétés projectives normales et soit $D \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$. On considère une résolution $\tilde{X}$ des singularités de X et X' avec $q = \varphi \circ p$ où p et q sont les morphismes de $\tilde{X}$ sur X et X' respectivement et on suppose $D' := q_*(p^*(D)) \in \mathrm{Div}(X')_{\mathbf{R}}$. On suppose $|D|_{\mathbf{R}}$ non vide. On obtient alors une application $\mathbf{R}$-linéaire

$$\begin{aligned} |D|_{\mathbf{R}} &\longrightarrow |D'|_{\mathbf{R}} \\ G &\longmapsto q_*(p^*(G)) \end{aligned}$$

qui ne dépend pas des choix faits. On remarque que si φ^{-1} ne contracte pas de diviseur alors $q_* \circ p^* = \varphi_*$. On souhaite comparer $N(D)$ et $N(D')$.

Soit P un diviseur premier sur X. On suppose que φ ne contracte pas P et on pose $P' := \varphi_* P$. On suppose d'abord $[D] \in \mathrm{Big}(X)$. On a donc $[D'] \in \mathrm{Big}(X')$. On a aussi

$$\mathrm{mult}_P(G) = \mathrm{mult}_{P'}(q_*(p^*G)) \geq \nu_{P'}(D')$$

pour tout $G \in |D|_{\mathbf{R}}$, et donc

$$\nu_P(D) \geq \nu_{P'}(D').$$

On suppose maintenant $[D] \in \mathrm{Pef}(X)$. Soient A un diviseur ample sur X et $A' := \varphi_* A$. On suppose $A' \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$. On a

$$\nu_P(D + \varepsilon A) \geq \nu_{P'}(D' + \varepsilon A')$$

pour tout $\varepsilon > 0$ puisque $[D + \varepsilon A] \in \mathrm{Big}(X)$ et, en passant à la limite, on obtient

$$\nu_P(D) \geq \nu_{P'}(D').$$

L'exemple suivant montre qu'il n'y a pas toujours égalité dans l'inégalité ci-dessus.

Exemple 2.1 Soit $X' = \mathbf{P}^1 \times C'$ où C' est une courbe complète (lisse) et soit $D' = \mathbf{P}^1 \times \{c'\}$ où c' est un point quelconque de C'. Soit $x' \in D'$ et soit $\varphi : X \to X'$ l'éclatement de X' en x'. On note $D := (\varphi^{-1})_* D'$. On a $\nu_P(D) = 1$ et $\nu_{P'}(D') = 0$ où $P = D$ et $P' = D'$.

On étudie maintenant des transformations birationnelles particulières.

Définition 2.2 Soient $\varphi : X \dashrightarrow X'$ une application birationnelle de variétés projectives normales et $D \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$. On dit que φ est D-négative (resp. D-strictement négative) si φ^{-1} ne contracte pas de diviseur, $D' := \varphi_* D \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ et s'il existe une résolution $\tilde{X}$ des singularités de X et X' avec $q = \varphi \circ p$ où p et q sont les morphismes de $\tilde{X}$ sur X et X'

respectivement pour laquelle $E := p^*(D) - q^*(D')$ est effectif (resp. effectif et son support contient les transformés stricts dans $\tilde{X}$ des diviseurs premiers sur X contractés par φ).

Remarque 2.3 On suppose que $\varphi : X \dashrightarrow X'$ est D-négative (resp. D-strictement négative). On considère une résolution $\tilde{X}$ des singularités de X et X' avec $q = \varphi \circ p$ où p et q sont les morphismes de $\tilde{X}$ sur X et X'. On pose $E := p^*(D) - q^*(D')$. On montre facilement que E est effectif (resp. effectif et que son support contient les transformés stricts dans $\tilde{X}$ des diviseurs premiers sur X contractés par φ).

Remarque 2.4 On suppose à nouveau que $\varphi : X \dashrightarrow X'$ est D-négative (resp. D-strictement négative). On considère $G \sim_{\mathbf{R}} D$ et $G' := \varphi_* G \sim_{\mathbf{R}} D'$. On pose $E_G := p^*(G) - q^*(G') \sim_{\mathbf{R}} E$. On a en fait $E_G = E$ par le lemme de négativité (voir [12, Lemma 3.39]). On en déduit que la propriété considérée ne dépend que de la classe de D modulo l'équivalence linéaire.

Lemme 2.5 *Soit $\varphi : X \dashrightarrow X'$ une application birationnelle de variétés projectives normales $\mathbf{Q}$-factorielles. Soient $D \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ et P un diviseur premier sur X. On suppose* $[D] \in \mathrm{Pef}(X)$.

1. *On suppose que φ est D-négative et ne contracte pas P. On a alors $\nu_P(D) = \nu_{P'}(D')$ où $D' := \varphi_* D$ et $P' := \varphi_* P$.*
2. *On suppose maintenant que φ est D-strictement négative et contracte P. On a alors* $\nu_P(D) > 0$.

Démonstration On considère une résolution $\tilde{X}$ des singularités de X et X' avec $q = \varphi \circ p$ où p et q sont les morphismes de $\tilde{X}$ sur X et X' respectivement. On pose $E := p^*(D) - q^*(D')$. On commence par démontrer la première assertion de l'énoncé. On suppose d'abord $[D] \in \mathrm{Big}(X)$. Soit $G' \in |D'|_{\mathbf{R}}$. On a $q^*(G') + E \sim_{\mathbf{R}} p^*(D)$ et on a donc $q^*(G') + E = p^*(p_*(q^*(G') + E))$ par le lemme de négativité (voir [12, Lemma 3.39]). On en déduit que l'application linéaire introduite ci-dessus

$$|D|_{\mathbf{R}} \longrightarrow |D'|_{\mathbf{R}}$$

est surjective et

$$\nu_P(D) = \nu_{P'}(D').$$

On suppose maintenant $[D] \in \mathrm{Pef}(X)$. Soit A' un diviseur très ample sur X' et $A := (\varphi^{-1})_* A'$. Quitte à remplacer A' par un diviseur qui lui est linéairement équivalent et A par le diviseur correspondant, on peut toujours supposer que φ est A-négative et donc également $(D + A)$-négative. On a

$$\nu_P(D + \varepsilon A) \geq \nu_{P'}(D' + \varepsilon A')$$

pour tout $\varepsilon > 0$ puisque $[D + \varepsilon A] \in \mathrm{Big}(X)$ et, en passant à la limite, on obtient

$$\nu_P(D) \geq \nu_{P'}(D').$$

On démontre maintenant la seconde assertion de l'énoncé. On reprend les notations introduites ci-dessus. On pose $F := p^*(A) - q^*(A')$ et on note $\tilde{P}$ le transformé strict de P dans $\tilde{X}$.

On fixe $\varepsilon > 0$. On considère $G \in |D + \varepsilon A|$ et on pose $G' := \varphi_* G$. On sait que $\mathrm{mult}_{\tilde{P}}(E) > 0$ par hypothèse et on a $p^*(G) = q^*(G') + E + \varepsilon F$ par la Remarque 2.4.

On a donc

$$\mathrm{mult}_P(G) = \mathrm{mult}_{\tilde{P}}(p^*(G)) \geq \mathrm{mult}_{\tilde{P}}(E + \varepsilon E_A) \geq \mathrm{mult}_{\tilde{P}}(E)$$

et, en passant à la limite, on obtient

$$\nu_P(D) \geq \mathrm{mult}_{\tilde{P}}(E) > 0.$$

□

3 Le programme des modèles minimaux

On commence ce paragraphe par quelques rappels sur le programme des modèles minimaux ou encore MMP (≪ Minimal Model Program ≫ en anglais). On donne ensuite les démonstrations des Théorèmes 1.1 et 1.2.

3.1 Les singularités de paires

On renvoie pour ce qui suit au très joli texte [15]. On désigne par K_X un diviseur canonique sur X. On rappelle qu'une paire (X, Δ) est la donnée d'une variété projective X normale et d'un $\mathbf{R}$-diviseur de Weil Δ sur X tels que $K_X + \Delta$ soit $\mathbf{R}$-Cartier. Soient (X, Δ) une paire et $p : \tilde{X} \to X$ une résolution des singularités de (X, Δ). On écrit

$$K_{\tilde{X}} + \tilde{\Delta} = p^*(K_X + \Delta) + \sum_F a_F(X, \Delta) F$$

où la somme porte sur l'ensemble des diviseurs premiers p-exceptionnels, $\tilde{\Delta}$ est le transformé strict de Δ dans $\tilde{X}$ et, si K_X est le diviseur d'une forme différentielle méromorphe ω_X sur X, $K_{\tilde{X}}$ est le diviseur de ω_X sur $\tilde{X}$. Si $F \subset \tilde{X}$ est un diviseur premier non p-exceptionnel, on définit $a_F(X, \Delta)$ comme étant l'opposé du coefficient de F dans $\tilde{\Delta}$. On appelle le réel $a_F(X, \Delta)$ la discrépance du diviseur premier F relativement à la paire (X, Δ).

On dit que la paire (X, Δ) est à singularités terminales (resp. canoniques) si Δ est effectif et pour toute résolution $p : \tilde{X} \to X$ des singularités de (X, Δ) et tout diviseur premier p-exceptionnel F, on a $a_F(X, \Delta) > 0$ (resp. $a_F(X, \Delta) \geq 0$). On dit que X est à singularités terminales (resp. canoniques) si $K_X \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbf{Q}}$ et $(X, 0)$ est à singularités terminales (resp. canoniques). On rappelle enfin que la paire (X, Δ) est dite klt (pour Kawamata log-terminale) si Δ est effectif et pour toute résolution $p : \tilde{X} \to X$ des singularités de (X, Δ) et tout diviseur premier F de $\tilde{X}$, on a $a_F(X, \Delta) > -1$.

3.2 Le MMP dirigé

On renvoie pour ce paragraphe à [2,12,13].

On rappelle qu'un modèle nef (resp. minimal) (X', φ) de la paire (X, Δ) est la donnée d'une paire (X', Δ') et d'une application birationnelle $\varphi : X \dashrightarrow X'$ telles que

1. $\Delta' = \varphi_* \Delta$,
2. φ soit $(K_X + \Delta)$-négative (resp. $(K_X + \Delta)$-strictement négative) et
3. $K_{X'} + \Delta'$ soit nef.

Le MMP dirigé est un MMP où les arêtes contractées ne sont pas choisies de façon arbitraire. Les données sont une paire (X, Δ) klt où X est $\mathbf{Q}$-factorielle et un $\mathbf{R}$-diviseur effectif $H \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ tel que $K_X + \Delta + H$ soit nef et $(X, \Delta + H)$ klt. On pose $t_0 = 1$. Le MMP dirigé par H produit (conjecturalement) des paires (X_i, Δ_i) avec X_i $\mathbf{Q}$-factorielle, une suite décroissante de réels $0 \leq t_i \leq 1$ pour $0 \leq i \leq m$, des applications birationnelles $\varphi_i : X_i \dashrightarrow X_{i+1}$ pour $0 \leq i \leq m-1$ telles que $K_{X_i} + \Delta_i + t_i H_i$ soit nef et $(X_i, \Delta_i + t_i H_i)$

klt où, Δ_{i+1} (resp. H_{i+1}) est le transformé strict de Δ_i (resp. H_i) dans X_{i+1} et un objet final $(X', \Delta') = (X_m, \Delta_m)$ tel que ou bien (X', φ) soit un modèle minimal de (X, Δ), où l'on a posé $\varphi := \varphi_{m-1} \circ \cdots \circ \varphi_0$, ou bien X' a une fibration de Mori. Enfin, $(X_i, \varphi_{i-1} \circ \cdots \circ \varphi_0)$ est un modèle nef de la paire $(X, \Delta + t_i H)$.

On explique maintenant comment faire. On suppose les (X_i, Δ_i) et $0 \le t_i \le 1$ déjà construits avec $K_{X_i} + \Delta_i + t_i H_i$ nef et on suppose $K_{X_i} + \Delta_i$ non nef. D'après [4, Lemma 2.6], il existe une arête $R_i \subset \overline{\mathrm{NE}}(X_i)$ et un réel $0 < t_{i+1} \le t_i$ tels que $(K_{X_i} + \Delta_i) \cdot R_i < 0$, $(K_{X_i} + \Delta_i + t_{i+1} H_i) \cdot R_i = 0$ et $K_{X_i} + \Delta_i + t_{i+1} H_i$ soit nef. Soit $c_i : X_i \to Y_i$ la contraction associée et supposons par exemple la contraction petite. Soit $c_i^+ : X_i^+ \to Y_i$ le flip de c_i qui existe d'après [2, Corollary 1.4.1]. On pose $X_{i+1} := X_i^+$ et $\Delta_{i+1} := \Delta_i^+$. On a (voir par exemple [12, Theorem 3.7]) $K_{X_i} + \Delta_i + t_{i+1} H_i = c_i^* M_i$ où $M_i \in \mathrm{Div}(Y_i)_{\mathbf{R}}$. Le diviseur M_i est nef puisque $K_{X_i} + \Delta_i + t_{i+1} H_i$ l'est, $K_{X_{i+1}} + \Delta_{i+1} + t_{i+1} H_{i+1} = ((c_i^+)^{-1} \circ c_i)_* (K_{X_i} + \Delta_i + t_{i+1} H_i) = (c_i^+)^* M_i$ l'est donc également. Le cas des contractions divisorielles est analogue.

Si $t \in [0, t_i[$ $(i \ge 1)$, $(K_{X_{i-1}} + \Delta_{i-1} + t H_{i-1}) \cdot R_{i-1} < 0$ de sorte que φ_{i-1} est $(K_{X_{i-1}} + \Delta_{i-1} + t H_{i-1})$-strictement négative par le lemme de négativité [12, Lemma 3.39]. On en tire facilement que l'application birationnelle $\varphi_{i-1} \circ \cdots \circ \varphi_0$ est $(K_X + \Delta + t_i H)$-négative ou encore que $(X_i, \varphi_{i-1} \circ \cdots \circ \varphi_0)$ est un modèle nef de $(X, \Delta + t_i H)$.

Le lemme suivant sera utile au paragraphe 4.

Lemme 3.1 *On suppose la contraction c_i petite. Alors* $\mathrm{Exc}(c_i^+)$ *est couvert par des courbes rationnelles contractées par c_i^+.*

Démonstration On a par construction que H_i est ample$/Y_i$ de sorte que $-H_{i+1}$ est ample$/Y_i$. La paire $(X_{i+1}, \Delta_{i+1} + (t_{i+1} + \varepsilon) H_{i+1})$ est klt pour $0 < \varepsilon \ll 1$ et $-(K_{X_{i+1}} + \Delta_{i+1} + (t_{i+1} + \varepsilon) H_{i+1}) = -c_i^{+*} M_i + \varepsilon(-H_{i+1})$ est ample$/Y_i$. On déduit alors le résultat cherché de [11, Theorem 1]. □

3.3 Quelques applications

On ne sait pas démontrer qu'il n'existe pas de suite infinie de flips. On dispose d'un résultat (beaucoup) plus faible mais suffisant ici.

Proposition 3.2 *Soient (X, Δ) une paire klt avec X $\mathbf{Q}$-factorielle et H un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif ample sur X tels que $K_X + \Delta + H$ soit nef et la paire $(X, \Delta + H)$ klt. On considère un MMP dirigé par H pour la paire (X, Δ) et on suppose qu'il n'aboutit pas. On a alors*

$$\lim_{i \to +\infty} t_i = 0.$$

Démonstration La suite $(t_i)_{i \ge 0}$ est décroissante et minorée donc convergente. On suppose que sa limite t_∞ est > 0. On sait que $(X_i, \varphi_{i-1} \circ \cdots \circ \varphi_0)$ est un modèle nef de $(X, \Delta + t_i H) = (X, \Delta + t_\infty H + (t_i - t_\infty) H)$. Or, d'aprés [2, Theorem E], l'ensemble des classes d'isomorphie de modèles nef des paires (X, Δ') pour $\Delta' \in \Delta + t_\infty H + [0, 1 - t_\infty] H$ est fini. Il existe donc deux entiers $i < j$ tels que l'application rationnelle $\varphi_{j-1} \circ \cdots \circ \varphi_i$ induise un isomorphisme de X_i sur X_j, ce qui donne la contradiction cherchée, à nouveau par le lemme de négativité (voir [12, Lemma 3.39]). □

Théorème 3.3 *Soient (X, Δ) une paire klt avec X $\mathbf{Q}$-factorielle et H un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif ample sur X tels que $(X, \Delta + H)$ soit klt. On suppose* $[K_X + \Delta] \in \mathrm{Pef}(X)$. *On considère un*

MMP dirigé par H pour la paire (X, Δ) et on reprend les notations introduites au paragraphe 3.2. On a $K_{X_i} + \Delta_i \in \overline{\mathrm{Mob}}(X_i)$ pour tout $i \gg 0$, et les diviseurs (premiers) contractés sont les composantes irréductibles du support de $N(K_X + \Delta)$.

Démonstration On a $[K_X + \Delta] \in \mathrm{Pef}(X)$ et donc, ou bien le MMP aboutit a un modèle minimal de la paire (X, Δ), ou bien il existe un entier i_0 tel que pour tout $i \geq i_0$ les φ_i soient des flips de petites contractions. On commence par le second cas.

Soit P un diviseur premier sur X. On suppose que P n'est contracté par aucune des applications rationnelles $\varphi_{i-1} \circ \cdots \circ \varphi_0$. On note P_i le transformé strict de P dans X_i. Par le Lemme 2.5, on a $\nu_P(K_X + \Delta + t_i H) = \nu_{P_i}(K_{X_i} + \Delta_i + t_i H_i)$ et $\nu_{P_i}(K_{X_i} + \Delta_i + t_i H_i) = 0$ puisque $K_{X_i} + \Delta_i + t_i H_i$ est nef par choix de t_i. On déduit finalement de la Proposition 3.2 que $\nu_P(K_X + \Delta) = 0$. On a donc que P n'est pas une composante irréductible du support de $N(K_X + \Delta)$.

Inversement, si P n'est pas une composante irréductible du support de $N(K_X + \Delta)$ alors $\nu_P(K_X + \Delta) = 0$ et P n'est donc contracté par aucune des applications rationnelles $\varphi_{i-1} \circ \cdots \circ \varphi_0$ par le Lemme 2.5.

On déduit également la première assertion de ce que nous venons d'expliquer et on traite le premier cas avec les mêmes arguments. □

Corollaire 3.4 *Soient (X, Δ) une paire klt avec X $\mathbf{Q}$-factorielle et H un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif ample sur X tels que $(X, \Delta + H)$ soit klt. On suppose $K_X + \Delta$ de dimension numérique 0, i.e. on suppose $[K_X + \Delta] \in \mathrm{Pef}(X)$ et $K_X + \Delta \equiv N(K_X + \Delta)$. Alors tout MMP dirigé par H pour la paire (X, Δ) aboutit à un modèle minimal (X', Δ') de la paire (X, Δ) avec $K_{X'} + \Delta' \equiv 0$.*

On termine ce paragraphe par le résultat suivant.

Proposition 3.5 *Soit (X, Δ) une paire klt où Δ est un $\mathbf{Q}$-diviseur et $[K_X + \Delta] \in \mathrm{Big}(X)$. Alors $N(K_X + \Delta)$ est un $\mathbf{Q}$-diviseur.*

Démonstration Soit k est un entier non nul tel que $k(K_X + \Delta)$ soit à coefficients entiers. On sait, d'après [2, Corollary 1.1.2], que l'algèbre

$$R(X, k(K_X + \Delta)) := \bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, mk(K_X + \Delta))$$

est de type fini. Quitte à remplacer k par un multiple entier non nul convenable, on peut supposer que l'algèbre $R(X, k(K_X + \Delta))$ est engendré par ses éléments de degré 1, auquel cas, pour tout diviseur premier P sur X, on a

$$\nu_P(k(K_X + \Delta)) \in \mathbf{Z}.$$

On en déduit que les $\nu_P(K_X + \Delta)$ sont des nombres rationnels. □

Démonstration du Théorème 1.1 On applique le Théorème 1.2 à la paire $(X, \varepsilon D)$ avec $0 < \varepsilon \ll 1$ assez petit. □

Démonstration du Théorème 1.2 On peut toujours supposer X $\mathbf{Q}$-factorielle d'après [2, Corollary 1.4.4]. On déduit les résultats annoncés du Théorème 3.3 et de la Proposition 3.5. □

4 Cas des variétés symplectiques

On montre facilement qu'un diviseur E sur une variété (lisse) X est exceptionnel si par un point général de E passe une courbe $C \subset E$ avec $E \cdot C < 0$. On sait démontrer que cette propriété caractérise les diviseurs exceptionnels si $\dim(X) = 2$. On démontre ici que c'est encore le cas si X est une variété symplectique holomorphe.

Définition 4.1 [3, Definition 1.1] Un germe X de variété analytique complexe est dit à singularités symplectiques si X est normal et s'il existe une 2-forme symplectique ω sur le lieu régulier X_{reg} de X telle que, pour toute résolution $p : \tilde{X} \to X$ des singularités de X, ω s'étende en une 2-forme régulière sur $\tilde{X}$.

Démonstration du Théorème 1.3 On fixe un diviseur premier exceptionnel E sur X. Soit $0 < \varepsilon \ll 1$ tel que la paire $(X, \varepsilon E)$ soit klt. On a $K_X \sim 0$ et $\varepsilon E = N(K_X + \varepsilon E)$. Soit H un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif ample sur X tel que la paire $(X, \varepsilon E + H)$ soit encore klt. On sait par le Théorème 3.3 que tout MMP pour la paire $(X, \varepsilon E)$ dirigé par H contracte E. On reprend les notations du paragraphe 3.2. Soit i_0 tel que le lieu exceptionnel de c_{i_0} soit E_{i_0}.

On sait que φ_i est un flop pour tout $i \le i_0 - 1$. On en déduit que X_i est à singularités terminales puis, d'après [17, Corollary 1] (voir également [9]), que X_i est lisse et symplectique pour tout $i \le i_0$.

On sait par ailleurs que le morphisme c_{i_0} est semi-petit d'après [10, Lemma 2.11] et on a donc $\dim(c_{i_0}(E_{i_0})) = 2\dim(X) - 2$. On sait aussi, d'après [11, Theorem 1], que E_{i_0} est couvert par des courbes rationnelles $(\ell_t)_{t \in T}$, contractées par c_{i_0} et telles que $(K_{X_{i_0}} + \varepsilon E_{i_0}) \cdot \ell_t < 0$ ou encore telles que $E_{i_0} \cdot \ell_t < 0$ pour tout $t \in T$.

Il suffit, pour terminer la démonstration du théorème, de montrer qu'aucune des intersections $\mathrm{Exc}(c_i^+) \cap E_{i+1}$ pour $i \le i_0 - 1$ ne domine $c_{i_0}(E_{i_0})$ via l'application naturelle $E_i \dashrightarrow E_{i_0} \to c_{i_0}(E_{i_0})$. On suppose que ce n'est pas le cas et on considère un entier $i \le i_0 - 1$ tel que $\mathrm{Exc}(c_i^+) \cap E_{i+1}$ domine $c_{i_0}(E_{i_0})$. On en déduit que l'une des composantes irréductibles W_i de $\mathrm{Exc}(c_i^+)$ est de dimension $2n-2$, contenue dans E_{i+1} et domine $c_{i_0}(E_{i_0})$; l'application rationnelle induite $W_i \dashrightarrow c_{i_0}(E_{i_0})$ est donc génériquement finie. Or, d'après le Lemme 3.1, W_i est uniréglée. On en déduit que $c_{i_0}(E_{i_0})$ l'est aussi. On sait enfin que la normalisée de $c_{i_0}(E_{i_0})$ est à singularités symplectiques (voir [20, Theorem 1.4]). Le Lemme 4.2 donne la contradiction cherchée. □

La première partie de l'argument ci-dessus démontre la Proposition 1.4.

Lemme 4.2 *Soit X une variété projective à singularités canoniques. Si $K_X \sim_{\mathbf{Q}} 0$ alors X n'est pas uniréglée.*

Démonstration Soit $p : \tilde{X} \to X$ une résolution des singularités de X. On écrit

$$K_{\tilde{X}} = p^*(K_X) + \sum_F a_F F$$

où la somme porte sur l'ensemble des diviseurs premiers p-exceptionnels et $a_F \ge 0$ par hypothèse. On suppose X uniréglée. On note $(\tilde{\ell}_t)_{t \in T}$ une famille de courbes rationnelles contenues dans $\tilde{X}$ dont les déformations dominent $\tilde{X}$. Soit $t \in T$. On a $-K_{\tilde{X}} \cdot \tilde{\ell}_t \ge 2$ d'après [14, Lemma II.3.13] et bien sûr $(\sum_F a_F F) \cdot \tilde{\ell}_t \ge 0$. On a donc $-K_X \cdot p_*(\tilde{\ell}_t) \ge 2$, une contradiction. □

Remarque 4.3 On reprend les hypothèses de la Proposition 1.4. On montre facilement (voir [20, Theorem 1.4] et [19, Theorem 4.1]) que les fibres générales du morphisme $E' \to c'(E')$

sont ou bien des courbes rationnelles lisses ou bien reunion de deux courbes rationnelles lisses se coupant transversalement en un point. On peut donc supposer $E \cdot \ell \in \{-2, -1\}$ dans la conclusion du Théorème 1.3.

On étudie enfin le feuilletage en courbes sur E induit par la forme symplectique ambiante (voir par exemple [7,8,18]).

Définition 4.4 Soient X une variété (algébrique) lisse et E un diviseur premier sur X. On suppose X symplectique et on considère une forme symplectique ω sur X. Elle induit une 2-forme sur l'ouvert dense E_{reg} des points réguliers de E de rang $\dim(E) - 1$ dont le noyau définit un feuilletage en courbes appelé feuilletage caractéristique sur E_{reg} (ou E).

Le résultat suivant généralise [18, Lemma 10]. On peut déduire l'énoncé de la Proposition 4.5 du Théorème 1.3 (ou plus exactement de sa démonstration) lorsque E est exceptionnel. On donne une démonstration élémentaire d'un résultat plus général.

Proposition 4.5 *Soient X une variété symplectique, projective et lisse et E un diviseur irréductible sur X. Si E est uniréglé alors les adhérences des feuilles générales du feuilletage caractéristique sur E sont des courbes rationnelles, et ce sont les seules courbes rationnelles dont les déformations dominent E.*

Démonstration On considère une composante irréductible T du schéma des morphismes $\mathrm{Hom}(\mathbf{P}^1, X)$ telle que $ev(T \times \mathbf{P}^1)$ rencontre E le long d'une partie dense, où $ev : T \times \mathbf{P}^1 \to X$ est le morphisme universel ; X étant symplectique le morphisme ev n'est pas dominant et on a donc $ev(T \times \mathbf{P}^1) \subset E$. On en déduit que pour $([f : \mathbf{P}^1 \to X], b) \in T \times \mathbf{P}^1$ général, le rang de la différentielle de ev en $([f], b)$ est $\dim(E) = \dim(X) - 1$. On a par ailleurs une décomposition

$$f^*T_X \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_n) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-a_n) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-a_1)$$

avec $a_1 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$ puisque X est supposée symplectique et enfin

$$rg(d_{([f],b)}ev) = rg(h^0(\mathbf{P}^1, f^*T_X) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \to f^*T_X)$$

d'après [14, Proposition II.3.4]. On a donc

$$a_2 = \cdots = a_n = 0 \quad \text{et} \quad a_1 \geq \deg(T_{\mathbf{P}^1}) = 2.$$

On considère maintenant une résolution $p : X' \to X$ des singularités de (X, E), on note E' le transformé strict de E dans X' et $f' : \mathbf{P}^1 \to X'$ le relevé de f à X'.

Le point $[f]$ étant supposé général dans T, les déformations de f' passent par un point général de E' et $f'^*T_{E'}$ est donc nef (voir [14, Proposition II.3.4]). On en déduit que l'image de $f'^*T_{E'}$ dans f^*T_X par l'application

$$f'^*T_{E'} \subset f'^*T_{X'} \to f'^* \circ p^*T_X = f^*T_X,$$

est contenue dans

$$f^*(T_X)^{\geq 0} := \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}^{\oplus(2n-2)}.$$

On a donc, le morphisme p induisant un isomorphisme au-dessus d'un point général de E, que pour $x \in f(\mathbf{P}^1)$ général, l'espace tangent $T_{E,x}$ à E en x s'identifie naturellement au sous-espace $(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}^{\oplus(2n-2)}) \otimes k(x)$ de $f^*T_X \otimes k(x)$ puis que $T_{f(\mathbf{P}^1),x}$ engendre le noyau de la restriction de ω à E en x, où ω est une forme symplectique sur X, ou encore que $f(\mathbf{P}^1)$ est l'adhérence de la feuille du feuilletage caractéristique sur E. □

References

1. Artin, M.: Some numerical criteria for contractability of curves on algebraic surfaces. Am. J. Math. **84**, 485–496 (1962)
2. Birkar, C., Cascini, P., Hacon, C., M^{c}Kernan, J.: Existence of minimal models for varieties of log general type. Prépublication électronique, arXiv:math/0610203 (2006)
3. Beauville, A.: Symplectic singularities. Invent. Math. **139**(3), 541–549 (2000)
4. Birkar, C.: On existence of log minimal models. Prépublication électronique, arXiv:0706.1792 (2007)
5. Boucksom, S.: Divisorial Zariski decompositions on compact complex manifolds. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **37**(1), 45–76 (2004)
6. Hacon, C., M^{c}Kernan, J.: Existence of minimal models for varieties of log general type ii. Prépublication électronique, arXiv:0808.1929 (2008)
7. Hwang, J.-M., Oguiso, K.: Characteristic foliation on the discriminantal hypersurface of a holomorphic lagrangian fibration. Prépublication électronique, arXiv:0710.2376 (2007)
8. Hwang, J.-M., Viehweg, E.: Characteristic foliation on a hypersurface of general type in a projective symplectic manifold. Prépublication électronique, arXiv:0812.2714 (2008)
9. Kaledin, D.: Symplectic resolutions: deformations and birational maps. Prépublication électronique, arXiv:math/0012008 (2001)
10. Kaledin, D.: Symplectic singularities from the Poisson point of view. J. Reine Angew. Math. **600**, 135–156 (2006)
11. Kawamata, Y.: On the length of an extremal rational curve. Invent. Math. **105**(3), 609–611 (1991)
12. Kollár, J., Mori, S.: Birational geometry of algebraic varieties. In: Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 134. Cambridge University Press, Cambridge (1998) (With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti, Translated from the 1998 Japanese original)
13. Kawamata, Y., Matsuda, K., Matsuki, K.: Introduction to the minimal model problem. In: Algebraic Geometry, Sendai, 1985, Adv. Stud. Pure Math., vol. 10, pp. 283–360. North-Holland, Amsterdam (1987)
14. Kollár, J.: Rational curves on algebraic varieties, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. In: 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 32. Springer, Berlin (1996)
15. Kollár, J.: Singularities of pairs. In: Algebraic Geometry—Santa Cruz 1995, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 62, pp. 221–287. American Mathematical Society, Providence (1997)
16. Nakayama, N.: Zariski-decomposition and abundance. MSJ Memoirs, vol. 14. Mathematical Society of Japan, Tokyo (2004)
17. Namikawa, Y.: On deformations of $\mathbb{Q}$-factorial symplectic varieties. J. Reine Angew. Math. **599**, 97–110 (2006)
18. Sawon, J.: Foliations on hypersurfaces in holomorphic symplectic manifolds. Prépublication électronique, arXiv:0812.3939 (2008)
19. Solá Conde, L.E., Wiśniewski, J.A.: On manifolds whose tangent bundle is big and 1-ample. Proc. Lond. Math. Soc. (3) **89**(2), 273–290 (2004)
20. Wierzba, J.: Contractions of symplectic varieties. J. Algebraic Geom. **12**(3), 507–534 (2003)
21. Zariski, O.: The theorem of Riemann–Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface. Ann. Math. **76**(2), 560–615 (1962)