

Espace des modules des faisceaux de rang 2 semi-stables de classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ et $c_3 = 0$ sur la cubique de \mathbf{P}^4

1. Introduction

(1.1) Soient $X \subset \mathbf{P}^4$ une hypersurface cubique lisse et $\ell \subset X$ une droite de \mathbf{P}^4 . Soit X_ℓ la variété obtenue en éclatant ℓ dans X . La projection le long de ℓ induit un morphisme $X_\ell \xrightarrow{p} \mathbf{P}^2$ dont les fibres sont les coniques qui sont coplanaires avec ℓ . Lorsque la droite ℓ est générique les fibres de p sont lisses ou réunion de deux droites distinctes. Le lieu de dégénérescence de p est alors une courbe plane lisse et connexe C_0 de degré 5. Soit C la variété des droites contenues dans X et incidentes à ℓ . Le morphisme $C \rightarrow C_0$ est un revêtement étale double connexe. Soit i l'involution échangeant les deux feuilletés dudit revêtement et notons encore i l'automorphisme induit sur la jacobienne JC . La variété de Prym associée au revêtement (C, C_0) est alors $P = (Id - i)JC$. C'est une variété abélienne principalement polarisée de dimension 5. Soient $A_1(X)$ le groupe des 1-cycles algébriques modulo l'équivalence rationnelle et $A \subset A_1(X)$ le sous-groupe des cycles algébriquement équivalents à zéro. L'application qui à $t \in C$ associe la classe de la droite correspondante $z_t \subset X_\ell$ dans A induit un isomorphisme de groupes $P \simeq A$. On démontre que pour toute variété lisse T de dimension pure $n \geq 1$ et tout $n + 1$ -cycle z sur $X \times T$ l'application d'Abel-Jacobi qui à $t \in T$ associe la classe du cycle $z_t - z_{t_0}$ dans P , où $t_0 \in T$ est fixé, est algébrique ([Mu]). La jacobienne intermédiaire de X est définie par :

$$J(X) = (H^{2,1}(X))^* / \alpha(H_3(X, \mathbf{Z}))$$

où α est l'application donnée par intégration sur les cycles. C'est une variété abélienne principalement polarisée de dimension 5 isomorphe à la variété de Prym. Via cet isomorphisme, l'image du cycle $z_t - z_{t_0}$ par l'application d'Abel-Jacobi est la forme linéaire donnée par intégration sur le cycle Γ modulo le groupe $\alpha(H_3(X, \mathbf{Z}))$ où $\partial\Gamma = z_t - z_{t_0}$. On démontre enfin que l'application d'Abel-Jacobi induit un plongement de la surface de Fano de X dans $J(X)$.

(1.2) Soient $(X, \mathcal{O}_X(1))$ une variété polarisée de dimension $n \geq 1$ et E un faisceau cohérent sur X de rang r . La pente $\mu(E)$ de E est définie par la formule :

$$\mu(E) = \frac{c_1(E)c_1(\mathcal{O}_X(1))^{n-1}}{r}$$

Le faisceau E est dit μ -semi-stable (resp. semi-stable) s'il est sans torsion et si pour tout sous-faisceau $L \subset E$ de rang $0 < r' < r$ on a $\mu(L) \leq \mu(E)$ (resp. $\frac{\chi(L(n))}{r'} \leq \frac{\chi(E(n))}{r}$ pour $n \gg 0$). Il est dit μ -stable (resp. stable) s'il est sans torsion et si pour tout sous-faisceau $L \subset E$ de rang $0 < r' < r$ on a $\mu(L) < \mu(E)$ (resp. $\frac{\chi(L(n))}{r'} < \frac{\chi(E(n))}{r}$ pour $n \gg 0$). On a les implications suivantes :

$$\mu\text{-stable} \implies \text{stable} \implies \text{semi-stable} \implies \mu\text{-semi-stable}$$

Supposons enfin $\text{Pic}(X) \simeq \mathbf{Z}$ et soit F un faisceau réflexif de rang 2 sur X , de première classe de Chern $c_1(F) = 0$ ou $c_1(F) = -1$. Alors F est stable si et seulement si $h^0(F) = 0$ et si $c_1(F) = 0$ alors F est semi-stable si et seulement si $h^0(F(-1)) = 0$ ([H2] lemme 3.1).

(1.3) Soient $X \subset \mathbf{P}^4$ une hypersurface cubique lisse et $\mathcal{O}_X(1)$ le générateur très ample de $\text{Pic}(X)$. Les \mathbf{Z} -modules $H^2(X, \mathbf{Z})$, $H^4(X, \mathbf{Z})$ et $H^6(X, \mathbf{Z})$ sont libres de rang 1. On identifie ainsi les classes de Chern d'un faisceau cohérent sur X à des entiers relatifs. Nous étudions ici l'espace des modules des faisceaux semi-stables de rang 2 sur X . Nous démontrons le :

THÉORÈME 1.4.—*Soient $X \subset \mathbf{P}^4$ une hypersurface cubique lisse et B la surface de Fano de X . Alors l'espace des modules M_X des faisceaux semi-stables de rang 2 sur X de classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ et $c_3 = 0$ est isomorphe à l'éclatement d'un translaté de la surface $-B$ dans la jacobienne intermédiaire $J(X)$.*

(1.5) Soit X une variété projective lisse de dimension au moins 2 et E un fibré vectoriel de rang 2 sur X . S'il existe une section globale dont le lieu des zéros Y est de codimension pure 2 alors on a une suite exacte ([H1]) :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow E \longrightarrow I_Y \otimes \det(E) \longrightarrow 0$$

(1.6) *Fibrés de rang 2 et construction de Serre.*— Supposons X de dimension au moins 3. Soit L un fibré inversible sur X tel que $h^1(L^{-1}) = 0$ et $h^2(L^{-1}) = 0$ et soit $Y \subset X$ un sous-schéma fermé de codimension pure 2. Le sous-schéma Y est le lieu des zéros d'une section d'un fibré E de rang 2 sur X de déterminant L si et seulement si Y est localement intersection complète et $\omega_Y = (\omega_X \otimes L)|_Y$.

(1.7) Soit $X \subset \mathbf{P}^4$ une hypersurface cubique lisse. Nous montrons que les fibrés vectoriels stables sont associés aux quintiques elliptiques normales tracées sur X par la construction de Serre (2.4), au moyen du :

(1.8) *Critère de Mumford-Castelnuovo.*— Soit F un faisceau cohérent sur une variété projective X tel que $h^i(F(-i)) = 0$ pour $i \geq 1$. Alors $h^i(F(k)) = 0$ pour $i \geq 1$ et $k \geq -i$ et F est engendré par ses sections globales ([Mum] lect. 14).

(1.9) Soit $X \subset \mathbf{P}^4$ une hypersurface cubique lisse. Nous montrons que les faisceaux stables non localement libres sont paramétrés par les coniques lisses tracées sur X et que les faisceaux strictement semi-stables sont paramétrés par les couples de droites de X (3.5). Nous montrons enfin que la seconde classe de Chern définit un morphisme vers la jacobienne intermédiaire $J(X)$. Ce morphisme est birationnel ([IM]) et identifie M_X à l'éclatement d'une surface lisse dans $J(X)$ (4.8).

(1.10) Soient F un faisceau cohérent sur un schéma X et $Y \subset X$ un sous-schéma fermé. La restriction de F à Y sera notée F_Y .

2. Fibrés de rang 2 stables sur la cubique de \mathbf{P}^4

LEMME 2.1.—*Soient $X \subset \mathbf{P}^N$ une variété de dimension $n \geq 2$ et E un fibré de rang 2 μ -semi-stable de première classe de Chern $c_1(E) = 0$. Si $h^0(E) \neq 0$ alors le lieu des zéros d'une section globale non nulle est de codimension pure 2 ou bien ladite section ne s'annule pas et $c_2(E) = 0$.*

Démonstration.—Le fibré E est de rang 2 et toute section non triviale s'annule donc en codimension au plus 2 ou bien ne s'annule pas. S'il existe une section partout non nulle alors E est extension de \mathcal{O}_X par L avec $c_1(L) = 0$ et $c_2(E) = 0$. Supposons qu'une section de E s'annule en codimension 1 et soit D la partie de codimension 1 du lieu des zéros de ladite section. On a ainsi $h^0(E(-D)) \neq 0$ et $\mu(\mathcal{O}_X(D)) \leq 0$ puisque E est semi-stable. Or D est effectif et on a donc $D = 0$. ■

LEMME 2.2.—*Soient $S \subset \mathbf{P}^3$ une surface cubique lisse et E un fibré de rang 2 μ -semi-stable de classes de Chern $c_1(E) = 0$ et $c_2(E) = 2$. Si $h^0(E) = 0$ alors $h^1(E(n)) = 0$ pour $n \in \mathbf{Z}$ et $h^2(E(n)) = 0$ pour $n \geq -1$. Si $h^0(E) \neq 0$ alors $h^0(E) = 1$, $h^1(E(n)) = 0$ pour $n \leq -2$ et $n \geq 1$, $h^1(E(-1)) = h^1(E) = 1$ et $h^2(E(n)) = 0$ pour $n \geq 0$.*

Démonstration.—*Supposons $h^0(E) = 0$.*—On a $h^1(E) = h^0(E) = 0$ puisque $h^2(E) = h^0(E(-1)) = 0$ et $\chi(E) = 0$. On a enfin $h^2(E(-1)) = h^0(E) = 0$. Finalement $h^i(E(1-i)) = 0$ pour $i \geq 1$ et le lemme est une conséquence de (1.8).

Supposons $h^0(E) \neq 0$.—Le fibré E est semi-stable et le lieu des zéros d'une section globale non nulle est donc de codimension pure 2 (2.1). On a donc une suite exacte (1.5) :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow E \longrightarrow I_Z \longrightarrow 0$$

où Z est un sous-schéma fermé de dimension 0 et de longueur 2. On en déduit en particulier $h^0(E) = 1$ et $h^1(E) = 1$ puisque $h^2(E) = h^0(E(-1)) = 0$ et $\chi(E) = 0$. L'application naturelle $H^0(\mathcal{O}_S(1)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_Z(1))$ est surjective puisque $\ell(Z) = 2$ et on a donc $h^1(I_Z(1)) = 0$. On en déduit $h^1(E(1)) = 0$. Finalement $h^i(E(2-i)) = 0$ pour $i \geq 1$ et le lemme est une conséquence de (1.8). ■

LEMME 2.3.—*Soient $S \subset \mathbf{P}^3$ une surface cubique lisse et E un fibré de rang 2 μ -semi-stable*

de classes de Chern $c_1(E) = 0$ et $c_2(E) = 1$. Si $h^0(E) \neq 0$ alors $h^0(E) = 1$, $h^1(E(n)) = 0$ pour $n \in \mathbf{Z}$ et $h^2(E(n)) = 0$ pour $n \geq 0$.

Démonstration.—Le fibré E est semi-stable et le lieu des zéros d'une section globale non nulle est donc de codimension pure 2 (2.1). On a une suite exacte (1.5) :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow E \longrightarrow I_Z \longrightarrow 0$$

où Z est un point de S . On en déduit $h^0(E) = 1$. La suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(n) \longrightarrow E(n) \longrightarrow I_Z(n) \longrightarrow 0$$

donne $h^1(E(n)) = 0$ pour $n \geq 0$ puisque $h^1(\mathcal{O}_S(n)) = 0$ et $h^1(I_Z(n)) = 0$ pour $n \geq 0$. On en déduit $h^1(E(n)) = h^1(E(-n-1)) = 0$ pour $n < 0$. On a enfin $h^2(E(n)) = h^0(E(-1-n)) = 0$ pour $n \geq 0$. ■

THÉORÈME 2.4.—*Soient $X \subset \mathbf{P}^4$ une cubique lisse et E un fibré de rang 2 stable de classes de Chern $c_1(E) = 0$ et $c_2(E) = 2$. Alors $E(1)$ est engendré par ses sections globales.*

Démonstration.—Soit $S \in |\mathcal{O}_X(1)|$ une section hyperplane générique de X tel que le fibré E_S soit μ -semi-stable relativement à la polarisation $\mathcal{O}_S(1)$ ([M] thm. 3.1).

Supposons $h^0(E_S) = 0$.—Il suffit de prouver $h^i(E(1-i)) = 0$ pour $i \geq 1$ (1.8). Considérons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow E(n-1) \longrightarrow E(n) \longrightarrow E_S(n) \longrightarrow 0$$

On a $h^1(E(n)) \leq h^1(E(n-1))$ puisque $h^1(E_S(n)) = 0$ pour $n \in \mathbf{Z}$ (2.2). On en déduit $h^1(E(n)) = 0$ pour $n \in \mathbf{Z}$ puisque $h^1(E(n)) = 0$ pour $n \ll 0$ puis $h^2(E(n)) = 0$ pour $n \in \mathbf{Z}$. On a enfin $h^3(E(-2)) = h^0(E) = 0$.

Supposons $h^0(E_S) \neq 0$ et montrons que nous aboutissons à une contradiction.—Le fibré $E(2)$ est alors engendré par ses sections globales. Il suffit en effet de prouver $h^i(E(2-i)) = 0$ pour $i \geq 1$ (1.8). Considérons à nouveau la suite exacte :

$$0 \longrightarrow E(n-1) \longrightarrow E(n) \longrightarrow E_S(n) \longrightarrow 0$$

On a $h^1(E(n)) \leq h^1(E(n-1))$ pour $n \leq -2$ puisque $h^1(E_S(n)) = 0$ pour $n \leq -2$ (2.2). On en déduit $h^1(E(-n)) = 0$ pour $n \geq 2$ puisque $h^1(E(n)) = 0$ pour $n \ll 0$. Calculons $h^1(E(1))$. On a $h^2(E) = h^1(E(-2)) = 0$ et $h^3(E) = h^0(E(-2)) = 0$. Puisque $\chi(E) = 0$ on a donc $h^1(E) = 0$ et la suite exacte :

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow E(1) \longrightarrow E_S(1) \longrightarrow 0$$

entraîne $h^1(E(1)) = h^1(E_S(1)) = 0$ (2.2). On a enfin $h^3(E(-1)) = h^0(E(-1)) = 0$. Le fibré $E(2)$ est donc engendré par ses sections globales.

Si l'une des sections du fibré $E(2)$ est partout non nulle alors $E(2)$ est isomorphe au fibré $\mathcal{O}_X(2) \oplus \mathcal{O}_X(-2)$ et $c_2(E) = -12$ ce qui est absurde. On a donc une suite exacte (1.5) :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-4) \longrightarrow E(-2) \longrightarrow I_C \longrightarrow 0$$

où $C \subset X$ est une courbe lisse de degré $c_2(E(2)) = 14$. On a $h^1(I_C) = 0$ et la courbe C est donc connexe. On a $\omega_C = \mathcal{O}_C(2)$ (1.6) et $g(C) = 15$. Enfin, la courbe C est non dégénérée puisque le fibré E est stable. Calculons $h^0(\mathcal{O}_C(1))$. La suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-3) \longrightarrow E(-1) \longrightarrow I_C(1) \longrightarrow 0$$

entraîne l'égalité $h^1(I_C(1)) = h^1(E(-1))$ puisque $h^1(\mathcal{O}_X(-3)) = 0$ et $h^2(\mathcal{O}_X(-3)) = 0$. La suite exacte :

$$0 \longrightarrow E(-2) \longrightarrow E(-1) \longrightarrow E_S(-1) \longrightarrow 0$$

donne $h^1(E(-1)) = h^1(E_S(-1)) = 1$ (2.2) puisque $h^1(E(-2)) = 0$ et $h^2(E(-2)) = h^1(E) = 0$. On a donc $h^1(I_C(1)) = 1$. On déduit de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow I_C(1) \longrightarrow \mathcal{O}_X(1) \longrightarrow \mathcal{O}_C(1) \longrightarrow 0$$

que $h^0(\mathcal{O}_C(1)) = 6$ puisque $h^0(I_C(1)) = 0$ et $h^1(\mathcal{O}_X(1)) = 0$. La courbe C est donc la projection dans \mathbf{P}^4 d'une courbe de Castelnuovo de \mathbf{P}^5 et le lemme 2.5 fournit la contradiction cherchée. ■

LEMME 2.5.—*Soit $C \subset \mathbf{P}^5$ une courbe non dégénérée de genre 15 et de degré 14 (courbe de Castelnuovo). Soit $O \in \mathbf{P}^5$ ($O \notin C$) tel que la projection à partir de O induise un plongement de C dans \mathbf{P}^4 . L'image de C dans \mathbf{P}^4 n'est alors contenue dans aucune cubique lisse.*

Démonstration.—La courbe C est contenue dans une surface irréductible $S \subset \mathbf{P}^5$ de degré 4. Ladite surface S et la courbe C sont ([ACGH]) :

ou bien

- la surface de Veronese et C est l'image d'une courbe plane de degré 7 par le plongement de Veronese,

ou bien

- l'image de $S_{2k} = \mathbf{P}_{\mathbf{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-2k))$, $k \in \{0, 1, 2\}$, par le morphisme φ_k associé au système linéaire $|C_0 + (k+2)f|$ et $C \in |4C_0 + (4k+6)f|$, où C_0 est la section associée au fibré naturel $\mathcal{O}_{S_{2k}}(1)$ ($C_0^2 = -2k$) et f est une génératrice de la surface réglée S_{2k} . Pour $k \in \{0, 1\}$ le morphisme φ_k est un plongement fermé, $S = \varphi_2(S_4)$ est un cône au-dessus d'une courbe rationnelle lisse de degré 4 et le morphisme φ_2 s'identifie à l'éclatement de $\varphi_2(S_4)$ en son sommet.

Notons π la projection considérée et $\pi(S)$ l'image de S par l'application rationnelle π . Si $\pi(S)$ est de dimension 1 alors S est un cône au dessus de C isomorphe à $\varphi_2(S_4)$ ce qui absurde puisque $g(C) \geq 1$. La variété $\pi(S)$ est donc de dimension 2. Si S est un cône alors son sommet et le point de projection sont donc distincts.

Supposons la courbe $C \subset \mathbf{P}^4$ contenue dans une cubique lisse X et notons $\overline{X} \subset \mathbf{P}^5$ le cône de

sommet O et de base X .

Supposons que la cubique \overline{X} ne contienne pas la surface S . L'hypersurface \overline{X} découpe alors sur S une courbe de degré 12 et ne peut donc pas contenir la courbe C . La cubique \overline{X} contient donc la surface S . On en déduit en particulier que $\pi(S) \subset X$.

Supposons $O \in S$. Si S est l'une des deux surfaces $\varphi_k(S_{2k})$ avec $k \in \{0, 1, 2\}$ alors la génératrice f passant par O est contractée par π . Or $C.f = 4$ et π ne peut donc pas induire un plongement de C dans \mathbf{P}^4 . Si S est la surface de Veronese alors l'application rationnelle $\mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^4$ obtenue est définie par le système linéaire des coniques passant par un point. Ce système linéaire induit un plongement de la surface de Hirzebruch \mathbb{F}_1 dans \mathbf{P}^4 dont l'image est une surface de degré 3. Or $\mathbb{F}_1 \subset X$ et ladite surface est un diviseur de Cartier associé au fibré $\mathcal{O}_X(l)$ où l est un entier convenable. Son degré est donc $3l$. On en déduit que la surface $\pi(S)$ est une section hyperplane de X , ce qui est absurde.

Il nous reste à traiter le cas où $O \notin S$. Notons d le degré de π . La surface $\pi(S)$ est donc de degré $\frac{4}{d}$. C'est un diviseur de Cartier associé au fibré $\mathcal{O}_X(l)$ où l est un entier convenable. Son degré est donc $3l$ ce qui constitue la contradiction cherchée puisque l'égalité $3ld = 4$ est impossible avec l et d entiers. ■

COROLLAIRE 2.6.—*Le fibré E est associé à une quintique elliptique lisse non dégénérée par la construction de Serre.*

Démonstration.—Il est donné par l'extension (1.5) :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-2) \longrightarrow E(-1) \longrightarrow I_C \longrightarrow 0$$

où C est une courbe lisse. On a en particulier $h^1(I_C) = 0$ et la courbe C est donc connexe. On a $\omega_C = \mathcal{O}_C$ (1.6) et la courbe C est donc une courbe elliptique de degré $c_2(E(1)) = 5$. Enfin la courbe C est linéairement normale puisque E est stable. ■

3. Faisceaux de rang 2 semi-stables sur la cubique de \mathbf{P}^4

PROPOSITION 3.1.—*Soient X une cubique lisse de \mathbf{P}^4 et E un faisceau de rang 2 semi-stable de classes de Chern $c_1(E) = 0$, $c_2(E) = 2$ et $c_3(E) = 0$. Soit F le bidual de E . Alors ou bien E est localement libre ou bien F est localement libre de seconde classe de Chern $c_2(F) = 1$ et $h^0(F) = 1$ ou bien $F = H^0(F) \otimes \mathcal{O}_X$.*

Démonstration.—Soit $S \in |\mathcal{O}_X(1)|$ une section hyperplane générique telle que E_S soit μ -semi-stable relativement à la polarisation $\mathcal{O}_S(1)$ ([M] thm 3.1) et telle que F_S soit isomorphe au bidual de E_S . Le faisceau F est μ -semi-stable. Le faisceau F_S est localement libre de rang 2 et μ -semi-stable de première classe de Chern $c_1(F_S) = 0$ ([H2]). Notons R le conoyau de l'inclusion canonique $E \subset F$. Le faisceau E est sans torsion et R est de dimension au plus 1. On a les formules

$c_2(F_S) = c_2(E_S) + c_2(R_S) = 2 - \ell(R_S)$ et $\chi(F_S) = \ell(R_S)$. On en déduit la relation

$$h^0(F_S) = h^1(F_S) + \ell(R_S)$$

puisque $h^2(F_S) = h^0(F_S(-1)) = 0$. Supposons $h^0(F_S) \geq 1$. Le lieu des zéros d'une section non nulle est ou bien vide ou bien de codimension pure 2 (2.1). S'il est vide alors le fibré F_S est trivial et s'il est de codimension pure 2 alors $h^0(F_S) = 1$. On a donc $\ell(R_S) \in \{0, 1, 2\}$ et $c_2(F_S) \in \{0, 1, 2\}$.

Considérons la suite exacte de restriction à une section hyperplane :

$$0 \longrightarrow F(n-1) \longrightarrow F(n) \longrightarrow F_S(n) \longrightarrow 0$$

On a $h^1(F_S(n)) = 0$ pour $n \leq -2$ et $n \geq 1$ (2.2 et 2.3). On en déduit $h^1(F(n-1)) \geq h^1(F(n))$ pour $n \leq -2$ et $h^2(F(n-1)) \leq h^2(F(n))$ pour $n \geq 1$. Or $h^1(F(n)) = 0$ pour $n \ll 0$ ([H2] thm. 2.5) et $h^2(F(n)) = 0$ pour $n \gg 0$ et on a donc $h^1(F(n)) = 0$ pour $n \leq -2$ et $h^2(F(n)) = 0$ pour $n \geq 0$. On a enfin $h^3(F) = h^0(F^*(-2)) = h^0(F(-2)) = 0$ ([H2] prop. 1.10) et $h^0(F) \leq h^0(F_S)$.

Supposons $\ell(R_S) = 0$ —Alors $c_2(F) = 2$ et $\chi(F) = \frac{c_3(F)}{2}$. On en déduit la formule $\frac{c_3(F)}{2} = h^0(F) - h^1(F)$. Or $c_3(F) \geq 0$ ([H2] prop. 2.6) et $h^0(F) \leq h^0(F_S) \leq 1$ et on a donc $c_3(F) = 0$ ou 2.

Si $c_3(F) = 0$ alors les faisceaux E et F sont canoniquement isomorphes et localement libres ([H2] prop. 2.6).

Si $c_3(F) = 2$ alors $h^0(F) = 1$ et $h^1(F) = 0$. Le faisceau R est donc de dimension 0 et $\ell(R) = \chi(F) - \chi(E) = 1$. On a donc $R = k(p)$ avec $p \in X$. Puisque $h^0(F) = 1$ on a un morphisme non nul $\mathcal{O}_X \longrightarrow F$. De plus, $\chi(E(n)) = n^3 + 3n^2 + 2n$ et $\chi(\mathcal{O}_X(n)) = \frac{n^3}{2} + \frac{3n^2}{2} + 2n + 1$ et on en déduit $h^0(E) = 0$ puisque E est semi-stable. Le morphisme induit $\mathcal{O}_X \longrightarrow R$ est donc non nul. Il est surjectif et induit une inclusion $I_p \subset X$. Or $\chi(I_p(n)) = \frac{n^3}{2} + \frac{3n^2}{2} + 2n$ ce qui est en contradiction avec la semi-stabilité de E .

Supposons $\ell(R_S) \geq 1$. On a donc $h^0(F_S) \geq 1$. Le lieu des zéros d'une section globale non nulle est ou bien vide ou bien de codimension pure 2 (2.1).

Supposons qu'il existe une section non nulle de F_S dont le lieu des zéros est de codimension pure 2. Alors $h^0(F_S) = 1$. On en déduit $h^1(F_S) = 0$ puis $\ell(R_S) = 1$ et $c_2(F) = 1$. On en déduit l'inégalité $\chi(F) = h^0(F) - h^1(F) = 1 + \frac{c_3(F)}{2} \leq 1 - h^1(F)$. Puis $c_3(F) = 0$ puisque $c_3(F) \geq 0$ ([H2] prop. 2.6). Le faisceau F est donc localement libre ([H2] prop. 2.6) de seconde classe de Chern $c_2(F) = 1$ et $h^0(F) = 1$.

Supposons enfin qu'il existe une section du fibré F_S ne s'annulant pas auquel cas ledit fibré est isomorphe au fibré $H^0(F_S) \otimes \mathcal{O}_S$ et donc $\ell(R_S) = 2$ et $c_2(F) = 0$. On en déduit l'inégalité $\chi(F) = \frac{c_3(F)}{2} + 2 = h^0(F) - h^1(F) \leq 2 - h^1(F)$ puis $c_3(F) = 0$ puisque $c_3(F) \geq 0$ ([H2] prop. 2.6) et $h^0(F) = 2$. Le faisceau F est donc localement libre ([H2] prop. 2.6). Supposons qu'il existe une

section globale non nulle de F dont le lieu des zéros Z est non vide. Le schéma Z est de dimension pure 1 puisque $h^0(F(-1)) = 0$ et F est donc extension de I_Z par \mathcal{O}_X . On en déduit $h^0(F) = 1$ ce qui est absurde. Le faisceau F est donc isomorphe au fibré $H^0(F) \otimes \mathcal{O}_X$. ■

LEMME 3.2.—*Soit R un faisceau cohérent sur \mathbf{P}^n ($n \geq 1$) tel que $h^0(R(-1)) = 0$ et $\chi(R(n)) = n + 1$. Il existe alors une droite $\ell \subset \mathbf{P}^n$ telle que $R = \mathcal{O}_\ell$.*

Démonstration.—Le faisceau R est de dimension 1 et on a donc $h^0(R) = h^1(R) + 1 \geq 1$. Soient $s \in H^0(R)$ une section non nulle et I_Z le noyau de l'application induite $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n} \rightarrow R$. On a $h^0(\mathcal{O}_Z(-1)) = 0$ et Z est donc de dimension pure 1. Considérons une section hyperplane générique $S \in |\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)|$. On a $\ell(R_S) = 1$ et l'inclusion $\mathcal{O}_{Z \cap S} \subset R_S$ est donc un isomorphisme. On en déduit que Z_{red} est une droite $\ell \subset \mathbf{P}^n$ et que le schéma Z est génériquement réduit le long de ℓ . Le noyau de l'application surjective $\mathcal{O}_Z \rightarrow \mathcal{O}_\ell$ est de dimension zéro et donc trivial puisque $h^0(\mathcal{O}_Z(-1)) = 0$. On a donc $R = \mathcal{O}_\ell$ puisque ces deux faisceaux ont même polynôme caractéristique. ■

LEMME 3.3.—*Soit R un faisceau cohérent sur \mathbf{P}^n ($n \geq 1$) tel que $h^0(R(-1)) = 0$ et $\chi(R(n)) = 2n + 2$. Alors il existe deux droites $\ell_1 \subset \mathbf{P}^n$ et $\ell_2 \subset \mathbf{P}^n$ telles que R soit extension de \mathcal{O}_{ℓ_2} par \mathcal{O}_{ℓ_1} ou bien $R(-1)$ est une thêta-caractéristique sur une conique lisse $C \subset \mathbf{P}^n$.*

Démonstration.—Le faisceau R est de dimension 1 et on a donc $h^0(R) = h^1(R) + 2 \geq 2$. Soient $s \in H^0(R)$ une section non nulle et I_Z le noyau de l'application induite $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n} \rightarrow R$. On a $h^0(\mathcal{O}_Z(-1)) = 0$ et Z est donc de dimension pure 1. Soit $S \in |\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)|$ une section hyperplane générique. On a $0 < \ell(Z \cap S) \leq \ell(R_S) = 2$. Notons Q le conoyau de l'inclusion $\mathcal{O}_Z \subset R$.

Supposons $\ell(Z \cap S) = 1$.—Le support du schéma Z est alors une droite ℓ_1 et ledit schéma est génériquement réduit le long de ℓ_1 . On a donc une application surjective $\mathcal{O}_Z \rightarrow \mathcal{O}_{\ell_1}$ dont le noyau est de dimension zéro. Ledit noyau est en fait trivial puisque $h^0(\mathcal{O}_Z(-1)) = 0$. Enfin, on a $\chi(Q(n)) = n + 1$ et $h^0(Q(-1)) = 0$ et le lemme 3.2 permet de conclure.

Supposons $\ell(Z \cap S) = 2$ et Q non trivial.—On a $h^1(R(-1)) = 0$ et on a donc $h^1(R(k)) = 0$ pour $k \geq -1$ (1.8). On en déduit en particulier $h^0(R) = 2$ et $h^0(R(1)) = 4$. Considérons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Z(1) \longrightarrow R(1) \longrightarrow Q(1) \longrightarrow 0$$

où Q est de dimension zéro. Le faisceau $R(1)$ est engendré par ses sections globales (1.8) et l'application $H^0(R(1)) \rightarrow H^0(Q(1))$ n'est donc pas identiquement nulle. On en déduit $h^0(\mathcal{O}_Z(1)) \leq 3$ et $h^0(I_Z(1)) \geq n - 2$. Il existe donc un plan $\mathbf{P}^2 \subset \mathbf{P}^n$ contenant le schéma Z . Notons J_Z l'idéal de Z dans ledit plan. On a $c_1(J_Z) = -2$ et on a donc une inclusion $J_Z \subset \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-2)$ qui induit une application surjective $\mathcal{O}_Z \rightarrow \mathcal{O}_C$ où C est une conique. Son noyau est de dimension zéro et donc

trivial puisque $h^0(\mathcal{O}_Z(-1)) = 0$. On a donc une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow R \longrightarrow k(p) \longrightarrow 0$$

Si $p \notin C$ alors l'extension précédente est triviale ce qui est absurde puisque $h^0(R(-1)) = 0$. On a donc $p \in C$. Montrons que R est un \mathcal{O}_C -module. Soit $f \in H^0(I_C(k))$ ($k \geq 0$) l'équation d'une hypersurface de degré k contenant C . Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_C(-k) & \longrightarrow & K(-k) & \longrightarrow & k(p)(-k) \\ & & \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_C(-k) & \longrightarrow & R(-k) & \longrightarrow & k(p)(-k) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \times f & & \downarrow \times f & & \downarrow \times f \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_C & \longrightarrow & R & \longrightarrow & k(p) \longrightarrow 0 \end{array}$$

où les complexes horizontaux sont exacts. Si l'application $K \rightarrow k(p)$ est nulle alors on a une inclusion $R(-k)/K(-k) \subset R$ avec $R(-k)/K(-k)$ de dimension zéro ce qui est impossible puisque $h^0(R(-1)) = 0$. Ladite application est donc surjective et on en déduit que l'application $R(-k) \rightarrow R$ est nulle. Le faisceau R est donc un \mathcal{O}_C -module. On vérifie alors qu'on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow I_p \longrightarrow H^0(R) \otimes \mathcal{O}_C \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

où I_p est l'idéal de p dans C . Si C est une conique lisse alors $R(-1)$ est la thêta-caractéristique sur C . Supposons C non lisse et soit $\ell \subset C$ une droite contenant p . L'inclusion $I_\ell \subset H^0(R) \otimes \mathcal{O}_C$ se factorise à travers l'inclusion $I_\ell \subset \mathcal{O}_C$ et on obtient ainsi une inclusion $\mathcal{O}_\ell \subset R$ dont le conoyau est également isomorphe au faisceau structural d'une droite (3.2).

Supposons $\ell(Z \cap S) = 2$ et $Q = 0$.—Le schéma Z_{red} est de degré au plus 2. S'il est de degré 2 ledit schéma est ou bien réunion de deux droites distinctes ou bien une conique lisse. On a alors une application surjective $\mathcal{O}_Z \rightarrow \mathcal{O}_C$ dont le noyau est trivial si C est réunion de droites disjointes et supporté en un point sinon. Ce dernier cas est impossible puisque $h^0(\mathcal{O}_Z(-1)) = 0$. Si Z_{red} est de degré 1 alors Z_{red} est une droite $\ell \subset \mathbf{P}^n$ et on a une surjection $\mathcal{O}_Z \rightarrow \mathcal{O}_\ell$ dont le noyau K vérifie $\chi(K(n)) = n + 1$ et $h^0(K(-1)) = 0$. Ce noyau est donc isomorphe au faisceau \mathcal{O}_ℓ (3.2). ■

LEMME 3.4.—*Soient $X \subset \mathbf{P}^4$ une cubique lisse et θ une thêta-caractéristique sur une conique lisse $C \subset X$. On considère le faisceau E noyau de l'application surjective $H^0(\theta(1)) \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \theta(1)$. Alors E est stable de classes de Chern $c_1(E) = 0$, $c_2(E) = 2$ et $c_3(E) = 0$.*

Démonstration.—Le calcul des classes de Chern de E est immédiat. Soit $F \subset E$ un sous-faisceau

de rang 1 de E . Le faisceau F est de la forme $I_Z(a)$ où $Z \subset X$ est un sous-schéma fermé de dimension au plus 1 et $a \in \mathbf{Z}$. On a un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & H^0(\theta(1)) \otimes I_C & \xlongequal{\quad} & H^0(\theta(1)) \otimes I_C & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & H^0(\theta(1)) \otimes \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \theta(1) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & \theta & \longrightarrow & H^0(\theta(1)) \otimes \mathcal{O}_C & \longrightarrow & \theta(1) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Notons F_0 le noyau de l'application induite $F \rightarrow \theta$. On a une inclusion $F_0 \subset H^0(\theta(1)) \otimes I_C$. Le faisceau $H^0(\theta(1)) \otimes I_C$ est μ -semi-stable de pente nulle et on a donc $c_1(F) = c_1(F_0) \leq c_1(H^0(\theta(1)) \otimes I_C) = 0$ puisque θ est de dimension 1.

Si $c_1(F) < 0$ on a $\chi(F(n)) < \frac{1}{2}\chi(E(n))$ pour $n \gg 0$ par un calcul classique. Si $c_1(F) = 0$ alors $F = I_Z$ avec $\text{codim}(Z) \geq 2$ et on a donc $I_Z^* = \mathcal{O}_X$. L'inclusion $I_Z \subset H^0(\theta(1)) \otimes \mathcal{O}_X$ déduite de l'inclusion $E \subset H^0(\theta(1)) \otimes \mathcal{O}_X$ est donc donnée par une section non nulle $s \in H^0(\theta(1))$. L'application induite $I_Z \rightarrow \theta(1)$ associe donc la section $f|_C s$ à la fonction f . La section s étant génériquement non nulle on en déduit $I_Z \subset I_C$ et donc $\chi(I_Z(n)) \leq \chi(I_C(n)) < \frac{1}{2}\chi(E(n))$ pour $n \gg 0$ puisque $\chi(I_C(n)) = \frac{n^3}{2} + \frac{3n^2}{2}$ et $\frac{\chi(E(n))}{2} = \frac{n^3}{2} + \frac{3n^2}{2} + n$. \blacksquare

THÉORÈME 3.5.—*Soient X une cubique lisse de \mathbf{P}^4 et E un faisceau de rang 2 semi-stable de classes de Chern $c_1(E) = 0$, $c_2(E) = 2$ et $c_3(E) = 0$. Si E est stable alors ou bien E est localement libre ou bien E est associé à une conique lisse $C \subset X$ (3.4). Si E est semi-stable non stable alors le gradué de E est somme directe des idéaux de deux droites de X .*

Démonstration.—Soit F le bidual de E et R le conoyau de l'injection canonique $E \subset F$. Le faisceau E est localement libre ou bien F est localement libre de seconde classe de Chern $c_2(F) = 1$ et $h^0(F) = 1$ ou bien $F = H^0(F) \otimes \mathcal{O}_X$ (3.1). On a $\chi(E(n)) = n^3 + 3n^2 + 2n$ et $\chi(\mathcal{O}_X(n)) = \frac{n^3}{2} + \frac{3n^2}{2} + 2n + 1$ et on en déduit $h^0(E) = 0$ puisque E est semi-stable.

Supposons E localement libre.—On a $h^0(E) = 0$ puisque E est semi-stable et le fibré E est donc stable.

Supposons F localement libre de seconde classe de Chern $c_2(F) = 1$ et $h^0(F) = 1$.— Alors $\chi(R(n)) = n + 1$. Soit $s \in H^0(F)$ une section non nulle. Elle s'annule le long d'une droite $\ell_2 \subset X$ (2.1). On a $h^0(E) = 0$ et la section s de F induit une application non nulle $\mathcal{O}_X \rightarrow R$.

Notons I_Z le noyau de l'application précédente. Le schéma Z est de dimension 1. Sinon on aurait une inclusion $I_Z \subset E$ avec $\chi(I_Z(n)) = \frac{n^3}{2} + \frac{3n^2}{2} + 2n + 1 - \ell(Z)$ ce qui est impossible par semi-stabilité de E . Soit $S \in |\mathcal{O}_X(1)|$ une section hyperplane générique. L'inclusion $\mathcal{O}_{Z \cap S} \subset R_S$ est un isomorphisme puisque $\ell(R_S) = 1$. Aussi la composante de dimension 1 du support de Z est une droite ℓ_1 et on a donc une application surjective $\mathcal{O}_Z \rightarrow \mathcal{O}_{\ell_1}$. On en déduit $R = \mathcal{O}_{\ell_1}$ puisque ces deux faisceaux ont même polynôme caractéristique. L'application $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{\ell_1}$ est non nulle et les droites ℓ_1 et ℓ_2 sont donc disjointes. Considérons le diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & I_{\ell_1} & \longrightarrow & \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\ell_1} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\ell_1} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & I_{\ell_2} & \xlongequal{\quad} & I_{\ell_2} & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

On en déduit que le faisceau E est semi-stable non stable et que son gradué est $I_{\ell_1} \oplus I_{\ell_2}$.

Supposons $F = H^0(F) \otimes \mathcal{O}_X$.— On a $\chi(R(n)) = 2n + 2$ et $h^0(E) = 0$ puisque E est semi-stable. On en déduit en particulier $h^0(R) \geq 2$. Considérons une section hyperplane générique $S \in |\mathcal{O}_X(1)|$. On a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow E_S \longrightarrow H^0(X, F) \otimes \mathcal{O}_S \longrightarrow R_S \longrightarrow 0$$

L'application $H^0(H^0(X, F) \otimes \mathcal{O}_S) \rightarrow H^0(R_S)$ n'est pas nulle puisque le morphisme $H^0(F) \otimes \mathcal{O}_S \rightarrow R_S$ est surjectif. On a donc $h^0(E_S) \leq 1$. Si $h^0(E_S) = 0$ alors l'application $H^0(F_S) \rightarrow H^0(R_S)$ est un isomorphisme et l'application $H^0(F_S) \otimes H^0(\mathcal{O}_S(n)) \rightarrow H^0(R_S(n))$ est surjective pour tout $n \geq 0$ puisqu'il existe une section hyperplane de S évitant le support de R_S . Si $h^0(E_S) = 1$ alors le quotient $H^0(F_S)/H^0(E_S)$ est de dimension 1 et on a une application surjective $(H^0(F_S)/H^0(E_S)) \otimes \mathcal{O}_S \rightarrow R_S$. Or $\ell(R_S) = 2$ et $\mathcal{O}_S(1)$ est très ample et l'application $(H^0(F_S)/H^0(E_S)) \otimes H^0(\mathcal{O}_S(n)) \rightarrow H^0(R_S(n))$ est donc surjective pour $n \geq 1$. Il en résulte que l'application $H^0(F_S) \otimes H^0(\mathcal{O}_S(n)) \rightarrow H^0(R_S(n))$ est également surjective. On a donc finalement $h^1(E_S(n)) = 0$ pour $n \geq 1$ puisque $h^1(\mathcal{O}_S(n)) = 0$ pour $n \geq 1$. La suite exacte :

$$0 \longrightarrow E(n-1) \longrightarrow E(n) \longrightarrow E_S(n) \longrightarrow 0$$

donne $h^2(E(n-1)) \leq h^2(E(n))$ pour $n \geq 1$. On a donc $h^2(E(n)) = 0$ pour $n \geq 0$ puisque $h^2(E(n)) = 0$ pour $n \gg 0$. En particulier $h^2(E) = 0$. On déduit de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow H^0(X, F) \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

l'égalité $h^3(E) = 0$. Mais $\chi(E) = 0$ et on a donc $h^1(E) = 0$. On en déduit $h^0(R) = 2$ et l'inclusion $H^0(F) \subset H^0(R)$ est donc un isomorphisme. Montrons alors que l'application de restriction $H^0(R) \rightarrow H^0(R_S)$ est injective. Supposons le contraire. Il existe donc une section $s \in H^0(R)$ non nulle dont l'image dans $H^0(R_S)$ est nulle. Notons I_Z le noyau de l'application $\mathcal{O}_X \rightarrow R$ définie par le section s et Q le conoyau de l'inclusion $\mathcal{O}_Z \subset R$. Par hypothèse, l'application $\mathcal{O}_{Z \cap S} \rightarrow R_S$ est nulle et on a donc $R_S = Q_S$. Le faisceau Q est donc de dimension 1 et $c_2(Q) = c_2(R)$. Le schéma Z est donc de dimension 0. Or $\chi(I_Z(n)) = \frac{n^3}{2} + \frac{3n^2}{2} + 2n + 1 - \ell(Z)$ ce qui est en contradiction avec la semi-stabilité de E puisqu'on a une inclusion $I_Z \subset E$. L'application de restriction $H^0(R) \rightarrow H^0(R_S)$ est injective et on a donc $h^0(R(-1)) = 0$. Le faisceau $R(-1)$ est donc ou bien une thêta-caractéristique sur une conique lisse $C \subset X$ auquel cas E est stable (3.4) ou bien il existe deux droites $\ell_1 \subset X$ et $\ell_2 \subset X$ telles que R soit extension de \mathcal{O}_{ℓ_1} par \mathcal{O}_{ℓ_2} (3.3) auquel cas on a un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & I_{\ell_1} & \longrightarrow & E & \longrightarrow & I_{\ell_2} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X & \longrightarrow & H^0(F) \otimes \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \mathcal{O}_X \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\ell_1} & \longrightarrow & R & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\ell_2} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

On en déduit que le gradué de E est le faisceau $I_{\ell_1} \oplus I_{\ell_2}$. ■

4. Espace des modules des faisceaux semi-stables sur la cubique de \mathbf{P}^4

(4.1) Soit $X \subset \mathbf{P}^4$ une hypersurface cubique lisse et soit $(Def(E), 0)$ l'espace des déformations verselles d'un faisceau cohérent E sur X . L'espace tangent à $Def(E)$ en 0 s'identifie à l'espace vectoriel $Ext_X^1(E, E)$. Le germe analytique $Def(E)$ est lisse en 0 si $Ext_X^2(E, E) = 0$.

LEMME 4.2.—*Soient $X \subset \mathbf{P}^4$ une cubique lisse et θ une thêta-caractéristique sur une conique lisse $C \subset X$. Soit E le noyau de la surjection $H^0(\theta(1)) \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \theta(1)$. Alors $Ext_X^2(E, E)$ est nul et l'espace vectoriel complexe $Ext_X^1(E, E)$ est de dimension 5.*

Démonstration.—Soit F le noyau de la surjection $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^4} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4} \rightarrow \theta(1)$. On vérifie que le faisceau $F(1)$ est engendré par ses sections globales en utilisant le critère de Mumford-Castelnuovo (1.8). On en déduit que le faisceau $E(1)$ est également engendré par ses sections globales puisqu'on a un morphisme surjectif $F|_X(1) \rightarrow E(1)$. On a donc

$$\mathrm{Hom}_X(E, \theta(-1)) \subset \mathrm{Hom}_X(H^0(E(1)) \otimes \mathcal{O}_X(-1), \theta(-1)) = 0.$$

Considérons la suite exacte :

$$\mathrm{Ext}_X^2(H^0(\theta(1)) \otimes \mathcal{O}_X, E) \longrightarrow \mathrm{Ext}_X^2(E, E) \longrightarrow \mathrm{Ext}_X^3(\theta(1), E)$$

On a

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_X^2(H^0(\theta(1)) \otimes \mathcal{O}_X, E) &\simeq H^0(\theta(1)) \otimes H^2(E) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_X^3(\theta(1), E) &\simeq \mathrm{Hom}_X(E, \theta(-1))^* \\ &= 0 \end{aligned}$$

et donc $\mathrm{Ext}_X^2(E, E) = 0$. Enfin, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_X^3(E, E) &\simeq \mathrm{Hom}_X(E, E(-2))^* \\ &= 0 \end{aligned}$$

et $\mathrm{Hom}_X(E, E) \simeq \mathbf{C}$. L'espace vectoriel complexe $\mathrm{Ext}_X^1(E, E)$ est donc de dimension 5 puisque

$$\begin{aligned} \chi(E, E) &= \sum (-1)^i \mathrm{Ext}_X^i(E, E) \\ &= -4. \end{aligned}$$

■

LEMME 4.3.—*Soit $X \subset \mathbf{P}^4$ une cubique lisse et soient $\ell_1 \subset X$ et $\ell_2 \subset X$ deux droites. Le groupe $\mathrm{Ext}_X^2(I_{\ell_1}, I_{\ell_2})$ est nul et l'espace vectoriel complexe $\mathrm{Ext}_X^1(I_{\ell_1}, I_{\ell_2})$ est de dimension 1 si $\ell_1 \neq \ell_2$ et de dimension 2 si $\ell_1 = \ell_2$.*

Démonstration.—On a un isomorphisme $\mathrm{Ext}_X^3(\mathcal{O}_{\ell_1}, I_{\ell_2}) \simeq \mathrm{Hom}_X(I_{\ell_2}, \mathcal{O}_{\ell_1}(-2))^*$. Or le faisceau $I_{\ell_2}(1)$ est engendré par ses sections globales et on a donc

$$\mathrm{Hom}_X(I_{\ell_2}, \mathcal{O}_{\ell_1}(-2)) \subset \mathrm{Hom}_X(H^0(I_{\ell_2}(1)) \otimes \mathcal{O}_X(-1), \mathcal{O}_{\ell_1}(-2)) = 0.$$

Considérons la suite exacte :

$$\mathrm{Ext}_X^2(\mathcal{O}_X, I_{\ell_2}) \longrightarrow \mathrm{Ext}_X^2(I_{\ell_1}, I_{\ell_2}) \longrightarrow \mathrm{Ext}_X^3(\mathcal{O}_{\ell_1}, I_{\ell_2})$$

On en déduit $\mathrm{Ext}_X^2(I_{\ell_1}, I_{\ell_2}) = 0$ puisque $\mathrm{Ext}_X^2(\mathcal{O}_X, I_{\ell_2}) = 0$. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_X^3(I_{\ell_1}, I_{\ell_2}) &\simeq \mathrm{Hom}_X(I_{\ell_2}, I_{\ell_1}(-2))^* \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \chi(I_{\ell_1}, I_{\ell_2}) &= \sum (-1)^i \mathrm{Ext}_X^i(I_{\ell_1}, I_{\ell_2}) \\ &= \mathrm{Ext}_X^0(I_{\ell_1}, I_{\ell_2}) - \mathrm{Ext}_X^1(I_{\ell_1}, I_{\ell_2}) \\ &= \chi(I_{\ell_1}, I_{\ell_1}) \\ &= -1. \end{aligned}$$

L'espace vectoriel complexe $\text{Ext}_X^1(I_{\ell_1}, I_{\ell_2})$ est donc de dimension 1 si $\ell_1 \neq \ell_2$ et de dimension 2 si $\ell_1 = \ell_2$ puisque $\text{Hom}_X(I_{\ell_1}, I_{\ell_2}) = 0$ si $\ell_1 \neq \ell_2$ et $\text{Hom}_X(I_{\ell_1}, I_{\ell_2}) \simeq \mathbf{C}$ si $\ell_1 = \ell_2$. ■

(4.4) Soient $N \geq 1$ un entier et V un espace vectoriel complexe. Soient Q le schéma de Hilbert-Grothendieck paramétrant les quotients $V \otimes \mathcal{O}_X(-N) \rightarrow E$ sur X de rang 2 et de classes de Chern $c_1(E) = 0$, $c_2(E) = 2$, $c_3(E) = 0$ et L la polarisation naturelle ([S]). Le groupe $G = PGL(V)$ agit sur Q et une puissance convenable de L est G -linéarisée. Soit Q_c^{ss} l'ouvert des points $PGL(V)$ -semi-stables correspondant à des quotients sans torsion et Q_c l'adhérence de Q_c^{ss} dans Q . Lorsque l'entier N et l'espace vectoriel V sont convenablement choisis les propriétés suivantes sont satisfaites. L'application $V \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow E(N)$ induit un isomorphisme $V \simeq H^0(E(N))$ et $h^i(E(k)) = 0$ pour $k \geq N$ et $i \geq 1$ et pour tout quotient E de Q_c . Le point $[E] \in Q_c$ est $PGL(V)$ -semi-stable si et seulement si le faisceau E est semi-stable si et seulement si $[E] \in Q_c^{ss}$. Le stabilisateur de $[E]$ dans $GL(V)$ s'identifie au groupe des automorphismes du faisceau E et l'espace des modules M_X des faisceaux semi-stables de rang 2 sur X et de classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ et $c_3 = 0$ est alors le quotient de Mumford :

$$Q_c^{ss} // G$$

LEMME 4.5.—*Sous les hypothèses précédentes, le schéma Q_c^{ss} est lisse.*

Démonstration.—L'espace tangent à Q_c^{ss} en un point $[E]$ est isomorphe à $\text{Hom}_X(F, E)$ où F est le noyau de l'application $V \otimes \mathcal{O}_X(-N) \rightarrow E$. Le schéma Q_c^{ss} est lisse en ce point si $\text{Ext}_X^1(F, E) = 0$. Considérons la suite exacte :

$$\text{Ext}_X^1(V \otimes \mathcal{O}_X(-N), E) \rightarrow \text{Ext}_X^1(F, E) \rightarrow \text{Ext}_X^2(E, E)$$

On en déduit une inclusion $\text{Ext}_X^1(F, E) \subset \text{Ext}_X^2(E, E)$ puisque $h^1(E(N)) = 0$. Il suffit donc de prouver $\text{Ext}_X^2(E, E) = 0$. Si E est stable et localement libre alors le résultat est démontré par [MT] (lemme 2.7). Si E est stable non localement libre alors l'annulation cherchée est donnée par le lemme 4.2. Si E est strictement semi-stable alors E est extension de I_{ℓ_2} par I_{ℓ_1} où $\ell_1 \subset X$ et $\ell_2 \subset X$ sont deux droites. L'annulation cherchée résulte alors facilement du lemme 4.3. ■

THÉORÈME 4.6.—*Soit $X \subset \mathbf{P}^4$ une hypersurface cubique lisse. L'espace des modules M_X des faisceaux semi-stables de rang 2 sur X de classes de chern $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ et $c_3 = 0$ est lisse de dimension 5.*

Démonstration.—Soient $x \in Q_c^{ss}$ et E le faisceau correspondant. Soit $Q_c^s \subset Q_c$ l'ouvert des faisceaux stables et M_X^s l'ouvert des classes d'isomorphismes de faisceaux stables. Le schéma Q_c^s est un fibré principal sous G au dessus de M_X^s et M_X^s est donc lisse (4.5). Il nous reste à étudier M_X en $E = I_{\ell_1} \oplus I_{\ell_2}$ où $\ell_1 \subset X$ et $\ell_2 \subset X$ sont deux droites (3.5). L'orbite $O(x)$ du point x sous G est fermée. Son stabilisateur G_x est un groupe réductif et il existe un sous-schéma affine

$W \subset Q_c^{ss}$ passant par x localement fermé et stable sous l'action de G_x tel que le morphisme $W//G_x \rightarrow Q_c^{ss}//G$ soit étale ([L]). Soit (W, x) le germe de W en x et soit F la restriction à $X \times (W, x)$ du quotient tautologique sur $X \times Q$. Alors $((W, x), F)$ est un espace de déformation verselles pour le faisceau E ([O] prop. 1.2.3). Le germe W est donc lisse en x (4.3) et puisque le morphisme $W//G_x \rightarrow Q_c^{ss}//G$ est étale il suffit donc prouver que le quotient $W//G_x$ est lisse en $[x]$. Or il existe un morphisme G_x -linéaire $(W, x) \rightarrow (T_x W, 0)$ étale en x tel que le morphisme induit $W//G_x \rightarrow T_x W//G_x$ soit étale en $[x]$ ([L]). Il suffit donc de prouver que le quotient $T_x W//G_x$ est lisse en 0.

Supposons les droites ℓ_1 et ℓ_2 distinctes. L'espace tangent $T_x W = \text{Ext}_X^1(E, E) = \oplus_{i,j} \text{Ext}_X^1(I_{\ell_i}, I_{\ell_j})$ est de dimension 6 (4.3) et $G_x = G_m \times G_m$ agit sur ledit espace par la formule ([O] lemme 1.4.16):

$$(t, t') \cdot \left(\sum_{i,j} e_{i,j} \right) = e_{1,1} + \frac{t}{t'} e_{1,2} + \frac{t'}{t} e_{2,1} + e_{2,2}$$

On vérifie facilement que le quotient $T_x W//G_x$ est isomorphe à l'espace affine \mathbb{A}^5 et en particulier lisse en 0.

Supposons les droites ℓ_1 et ℓ_2 confondues et notons ℓ cette droite. L'espace tangent $T_x W = \text{Ext}_X^1(E, E)$ est de dimension 8 (4.3) et $G_x = PGL(2)$. Posons $T = \text{Ext}_X^1(I_\ell, I_\ell)$ et soit U un espace vectoriel de dimension 2. Le groupe G_x agit sur $T_x W = T \otimes \text{End}(U)$ par conjugaison sur $\text{End}(U)$ ([O] lemme 1.4.16). Le quotient $T_x W//G_x$ est isomorphe à l'espace affine \mathbb{A}^5 ([La] III cas 2) et en particulier lisse en 0. ■

LEMME 4.7.—*Soient $X \subset \mathbf{P}^4$ une cubique lisse et M_X l'espace des modules des faisceaux de rang 2 semi-stables de classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ et $c_3 = 0$. Le sous-schéma localement fermé de M_X des faisceaux stables non localement libres est irréductible de dimension 4 et le sous-schéma fermé de M_X des faisceaux strictement semi-stables est également irréductible de dimension 4.*

Démonstration.—Soient B la surface de Fano de X et $Z \subset X \times B$ la variété d'incidence. La variété Z est lisse et irréductible de dimension 3 et le morphisme $Z \rightarrow B$ induit par la seconde projection fait de Z un fibré en droites projectives localement trivial pour la topologie de Zariski ([T]). Notons X_Z la variété obtenue en éclatant Z dans le produit $X \times B$ et notons p et q les morphismes induits sur X et B respectivement. La fibre du morphisme q au-dessus d'un point $[\ell] \in B$ s'identifie à X_ℓ (1.1). Soit Q le fibré de rang 3 sur B dont la fibre au-dessus d'un point $[\ell] \in B$ est l'ensemble des équations des hyperplans de \mathbf{P}^4 contenant la droite ℓ . Le morphisme surjectif naturel $q^* Q \rightarrow p^* \mathcal{O}_X(1)$ induit un morphisme propre et dominant $X_Z \xrightarrow{c} \mathbf{P}_B(Q)$. Le morphisme $p \times c$ induit un plongement de X_Z dans $X \times \mathbf{P}_B(Q)$ au-dessus de $\mathbf{P}_B(Q)$. L'ensemble des points de $\mathbf{P}_B(Q)$ est en bijection ensembliste avec l'ensemble des coniques tracées sur X . Soit $U \subset \mathbf{P}_B(Q)$ l'ouvert des coniques lisses et soit π la projection de $\mathbf{P}_B(Q)$ sur B . Soit $x \in U$ et $C_x = c^{-1}(x) \subset X$ la conique correspondante. La conique C_x engendre un plan de \mathbf{P}^4 dont l'intersection résiduelle avec X est la droite $\pi(x) = [\ell_x]$. Soit $Y = (c^{-1}(U) \cap Z_U)_{\text{red}} \subset c^{-1}(U) \subset U \times \mathbf{P}^4$ où $Z_U = Z \times_B U$. Le morphisme induit $Y \rightarrow U$ est alors fini de degré 2. La fibre du morphisme

précédent au dessus d'un point $x \in U$ est ensemblistement l'intersection $C_x \cap \ell_x$. Supposons Y irréductible. Le schéma $c^{-1}(U) \times_U Y$ possède une section au dessus de Y . Ladite section détermine un morphisme quasi-fini $Y \rightarrow M_X$ dont l'image est précisément le sous-schéma localement fermé des faisceaux stables non localement libres (3.4). Le lemme est donc démontré dans ce cas. Si Y n'est pas irréductible alors le morphisme c possède une section au-dessus de l'ouvert U et l'argument précédent s'applique directement.

Les faisceaux strictement semi-stables sont paramétrés par les couples de droites de X (3.5). Or on a un morphisme quasi-fini $B \times B \rightarrow M_X$ dont l'image est le fermé des faisceaux strictement semi-stables. La surface B est irréductible et ledit fermé l'est donc également. ■

THÉORÈME 4.8.—*Soient $X \subset \mathbf{P}^4$ une cubique lisse et M_X l'espace des modules des faisceaux de rang 2 semi-stables de classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ et $c_3 = 0$. Soit B la surface de Fano de X . Alors M_X est isomorphe à l'éclatement d'un translaté de la surface $-B$ dans la jacobienne intermédiaire de X .*

Démonstration.—Soit $U \subset M_X$ l'ouvert des fibrés vectoriels stables; $M_X \setminus U$ est de dimension 4 (3.5 et 4.7). L'espace des modules M_X est lisse de dimension 5 (4.6) et l'ouvert U est donc dense. La variété M_X est donc irréductible (2.6 et [IM] cor. 5.1).

L'espace des modules M_X est le quotient de Mumford $Q_c^{ss} // G$ et Q_c^{ss} est lisse (4.5). Soit \mathcal{E} une famille universelle sur $Q_c^{ss} \times X$. Fixons $t_0 \in Q_c^{ss}$. L'application

$$\begin{aligned} Q_c^{ss} &\rightarrow J(X) \\ t &\mapsto c_2(\mathcal{E}_t) - c_2(\mathcal{E}_{t_0}) \end{aligned}$$

est algébrique (1.1) et équivariante sous l'action du groupe G . On en déduit un morphisme que nous noterons encore c_2 de M_X vers $J(X)$. Ce morphisme est birationnel ([IM] thm. 3.2) et induit un isomorphisme par restriction à l'ouvert des fibrés stables (2.6 et [MT]).

Les variétés M_X et $J(X)$ sont lisses et le lieu exceptionnel D de c_2 est donc de codimension pure 1. Le diviseur D a au plus deux composantes irréductibles. La restriction de c_2 au diviseur des faisceaux strictement semi-stables est génériquement finie et le morphisme c_2 est donc un isomorphisme au point générique du diviseur considéré.

La grassmanienne des plans de \mathbf{P}^4 est rationnelle et les cubiques planes tracées sur X sont donc toutes rationnellement équivalentes. Soient C_0 et C_1 deux coniques tracées sur X et ℓ_0 et ℓ_1 les intersections résiduelles respectives des plans des coniques avec X . On a donc $C_1 = C_0 + \ell_0 - \ell_1$ dans $J(X)$. Si E est un faisceau associé à une conique $C \subset X$ (3.4) alors $c_2(E) = C$. On en déduit que le diviseur adhérence des faisceaux stables non localement libres est contracté sur un translaté de $-B$ dans $J(X)$. Ce diviseur est irréductible (4.7) et M_X est donc isomorphe à l'éclatement d'un translaté de $-B$ dans $J(X)$ ([Lu] thm. 2). ■

Références bibliographiques

- [ACGH] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths, J. Harris, *Geometry of Algebraic curves I*, Grundlehren der math. Wissenschaften, vol. 267, Springer Verlag (1985).
- [H1] R. Hartshorne, *Stable vector bundles of rank 2 on \mathbf{P}^3* , Math. Ann. 238 (1978), 229-280.
- [H2] R. Hartshorne, *Stable reflexives sheaves*, Math. Ann. 254 (1980), 121-176.
- [IM] A. Iliev, D. Markushevich, *The Abel-Jacobi map for a cubic threefold and periods of Fano threefolds of degree 14*, Documenta Math. 5 (2000), 23-47.
- [La] Y. Laszlo, *Local structure of the moduli space of vector bundles over curves*, Comment. Math. Helvetici 71 (1996), 373-401.
- [L] D. Luna, *Slices étales*, Mém. Soc. Math. France 33 (1973), 81-105.
- [Lu] Z. Luo, *Factorization of birational morphisms of regular schemes*, Math. Z. 212 (1993), 505-509.
- [MT] D. Markushevich, A.S. Tikhomirov, *The Abel-Jacobi map of a moduli component of vectors bundles on the cubic threefold*, math. AG/9809140, à paraître dans J. Alg. Geom.
- [M] M. Maruyama, *Boundedness of semi-stable sheaves of small ranks*, Nagoya Math. J. 78 (1980), 65-94.
- [Mum] D. Mumford, *Lectures on curves on an algebraic surface*, Annals of Math. Studies 59, Princeton university Press (1966).
- [Mu] J.P. Murre, *Some results on cubic threefolds* dans *Classification of algebraic varieties and compact complex manifolds*, Springer-Verlag Lecture Notes 412 (1974), 140-164.
- [O] K. O'Grady, *Desingularized moduli spaces of sheaves on a K3*, J. Reine Angew Math. 512 (1999), 49-117.
- [S] C. Simpson, *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth variety*, Publ. Math. IHES 79 (1994), 47-129.
- [T] A.N. Tyurin, *The Fano surface of a nonsingular cubic in \mathbf{P}^4* , Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. 34 (1970), 1200-1208.