Math. Ann. 313, 429–435 (1999)

Mathematische Annalen


# Structures de contact sur les variétés toriques

**Stéphane Druel**

DMI-École Normale Supérieure, 45, rue d'Ulm, F-75005 Paris, France
(e-mail: druel@clipper.ens.fr)

Reçu le 13 juillet 1998

*Mathematics Subject Classification (1991):* 15 Jxx, 14 M25, 53C15

## 1. Introduction

Une *structure de contact* sur une variété algébrique lisse est la donnée d'un sous-fibré $D \subset \mathcal{T}_X$ de rang $\dim X - 1$ de sorte que la forme $\mathcal{O}_X$-bilinéaire sur $D$ à valeurs dans le fibré en droites $L = \mathcal{T}_X/D$ déduite du crochet de Lie sur $\mathcal{T}_X$ soit non dégénérée en tout point de $X$. Cela entraîne que $X$ est de dimension impaire $2n+1$ et que le fibré canonique $K_X$ est isomorphe à $L^{-1-n}$. On peut aussi définir la structure de contact par la donnée d'un élément $\theta \in H^0(X, \Omega^1_X \otimes L)$, la *forme de contact*, tel que $\theta \wedge (d\theta)^n$ soit partout non nul.

Les espaces projectifs complexes et les variétés $\mathbb{P}_Y(\mathcal{T}_Y)$, où $Y$ est une variété lisse, sont des exemples de variétés de contact.

En quelques mots, une *variété torique* est une compactification équivariante d'un tore ([D], [O1], [O2] [F]).

L'étude des variétés de contact se révèle difficile. En dimension 3, elles ont été classifées par Y-G.Ye ([Y]) en utilisant la théorie de Mori. D'autres auteurs étudient les structures de contact sur les variétés de Fano ([B], [L]), mais les résultats ne sont ici encore que partiels.

Le résultat principal de ce travail est le

**Théorème** *Soit $X$ une variété torique projective lisse de dimension $2n+1$ ($n \geq 1$), définie sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes et munie d'une structure de contact.*

*Alors $X$ est soit isomorphe à l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^{2n+1}$, soit isomorphe à la variété $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1\times\cdots\times\mathbb{P}^1}(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^1\times\cdots\times\mathbb{P}^1})$.*

*Remerciements* : je tiens à exprimer toute ma gratitude à A.Beauville pour m'avoir soumis ce problème et pour l'aide qu'il m'a apporté.

## 2. Rappels et notations

Soit $X$ une variété projective lisse sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Le produit d'intersection entre 1-cycles et diviseurs met en dualité les deux espaces vectoriels réels :

$$N_1(X) = (\{\text{1-cycles}\}/\equiv) \otimes \mathbb{R} \text{ et } N^1(X) = (\{\text{diviseurs}\}/\equiv) \otimes \mathbb{R},$$

où $\equiv$ désigne l'équivalence numérique. La dimension commune de ces espaces vectoriels est appelée le *nombre de Picard* de $X$. On considère le cône $NE(X) \subset N_1(X)$ engendré par les classes des 1-cycles effectifs. Une *raie extrémale* est une demi-droite $R$ dans $\overline{NE}(X)$, adhérence de $NE(X)$ dans $N_1(X)$, vérifiant $K_X.R^* < 0$ et telle que pour tout $Z_1, Z_2 \in \overline{NE}(X)$, si $Z_1 + Z_2 \in R$ alors $Z_1, Z_2 \in R$ ([M]). Une *courbe rationnelle extrémale* est une courbe rationnelle irréductible $C$ telle que $\mathbb{R}^+[C]$ soit une raie extrémale et $-K_X.C \leq \dim X + 1$. *Toute raie extrémale $R$ est engendrée par une courbe rationnelle extrémale et admet une contraction*, c'est-à-dire qu'il existe une variété projective normale $Y$ et un morphisme $X \xrightarrow{\phi} Y$, surjectif à fibres connexes, contractant les courbes irréductibles $C$ telles que $[C] \in R$ (théorème de Kawamata-Shokurov).

Dans le cas des variétés toriques, nous avons un résultat plus précis ([R]). Soit $X$ une variété torique projective lisse associée à l'éventail $\Delta$. Nous utiliserons les notations de T.Oda ([O2]). Il existe alors des éléments $\tau_1, \ldots, \tau_s \in \Delta(d-1)$ tels que :

$$NE(X) = \overline{NE}(X) = \mathbb{R}^+[V(\tau_1)] + \ldots + \mathbb{R}^+[V(\tau_s)].$$

Les demi-droites $\mathbb{R}^+[V(\tau_i)]$ sont appelées *raies extrémales généralisées.* Soit $R \subset NE(X)$ une raie extrémale généralisée. Alors il existe une variété torique projective $Y$ et un morphisme équivariant $X \xrightarrow{\phi} Y$ qui soit une contraction au sens de Mori. Notons $A \subset X$ le lieu exceptionnel de $\phi$ et $B = \phi(A)$ :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & Y \\ \cup & & \cup \\ A & \xrightarrow{\phi_{|A}} & B \end{array}$$

Alors $A$ et $B$ sont deux strates toriques irréductibles, le morphisme $A \xrightarrow{\phi_{|A}} B$ est plat et ses fibres sont des espaces projectifs pondérés. Enfin, lorsque la contraction est de type fibrée, la variété $Y$ est régulière et le morphisme $\phi$ est lisse.

Rappelons enfin un résultat général de J.Wisniewski ([W1], [W2]) sur le lieu exceptionnel d'une contraction extrémale. Soit $F$ une fibre non triviale d'une contraction élémentaire associée à la raie extrémale $R$. Nous appelons *lieu de* $R$, le lieu des courbes dont la classe d'équivalence numérique appartient à $R$. On a alors l'inégalité :

$$\text{dim}F + \text{dim(lieu de } R) \geq \text{dim}X + \ell(R) - 1,$$

où $\ell(R)$ désigne la *longueur* de la raie extrémale $R$ :

$$\ell(R) = \text{inf}\{-K_X.C_0 | C_0 \text{ étant une courbe rationnelle et } C_0 \in R\}.$$

## 3. Preuve du théorème

**Lemme 1** *Soit $Y$ une variété torique projective lisse de dimension $n$ et $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel de rang $r+1$ sur $Y$. On suppose que $X = \mathbb{P}_Y(\mathcal{E})$ est une variété torique et que le morphisme naturel $X \xrightarrow{\phi} Y$ est équivariant.*

*Alors le fibré $\mathcal{E}$ est totalement décomposé.*

*Démonstration* Notons $T$ le tore de dimension $n+r$ agissant sur $X$, $T^{'}$ le tore de dimension $n$ agissant sur $Y$ et $T \xrightarrow{\phi_*} T^{'}$ le morphisme de groupes algébriques associé à $\phi$. Les hypothèses faites entraînent que ce morphisme est surjectif. Notons $N$ le noyau $N = \ker(\phi_*)$, c'est un groupe algébrique produit d'un tore $T^{''}$ de dimension $r$ par un groupe fini.

Puisque $X$ est une variété torique, le fibré $\mathcal{O}_X(1)$ est $T$-linéarisé et en particulier $T^{''}$-linéarisé. Le tore $T^{''}$ agissant trivialement sur $Y$, il en résulte facilement que le fibré $\mathcal{E}$ est $T^{''}$-linéarisé. Par suite, le fibré $\mathcal{E}$ est somme directe de ses composantes isotypiques :

$$\mathcal{E} = \oplus_{\chi \in X(T^{''})} \mathcal{E}_\chi$$

où $X(T^{''})$ désigne le groupe des caractères de $T^{''}$. Si l'un des fibrés vectoriels $\mathcal{E}_\chi$ est de rang supérieur où égal à deux, nous allons voir qu'un sous-tore non trivial de $T^{''}$ agit trivialement sur $X$, ce qui est impossible. Notons $\chi_1, \dots, \chi_k$ $(k \geq 1)$ les caractères de $T^{''}$ intervenant dans la décomposition précédente et supposons que $k \leq r-1$. Considérons la composante neutre de l'intersection des noyaux de ces caractères. Par construction, l'action de ce tore sur le fibré $\mathcal{E}$ est triviale, ce qui est la conclusion souhaitée. $\square$

**Lemme 2** *Soit $X$ une variété torique projective lisse de dimension $n \geq 1$ dont le fibré tangent est totalement décomposé.*

*Alors $X$ est isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \ldots \times \mathbb{P}^1$.*

*Démonstration* Notons $\Delta$ l'éventail définissant la variété torique $X$, $T$ le tore agissant sur $X$ et $N = \mathrm{Hom}_{gr.\,alg.}(\mathbb{G}_m, T)$. Par hypothèse, il existe des fibrés en droites $L_1, \ldots, L_n$ sur $X$ tels que $\mathcal{T}_X = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$. Remarquons que le fibré tangent est naturellement linéarisé puisque, si $t \in T$, $d(t.)$ définit un automorphisme du fibré tangent à $X$. Par un résultat de A.A.Klyachko ([K] thm.1.2.3), on peut toujours supposer que l'isomorphisme précédent est équivariant, pour un choix convenable de linéarisations des fibrés $L_i$ , $(1 \leq i \leq n)$.

Prenons $\sigma \in \Delta(n)$ et considérons l'ouvert $U_\sigma$ qui lui est associé. Puisque la variété torique $X$ est lisse, $\sigma = \mathbb{R}^+ e_{1,\sigma} + \ldots + \mathbb{R}^+ e_{n,\sigma}$ où $(e_{1,\sigma}, \ldots, e_{n,\sigma})$ est une base de $N$. Par définition $U_\sigma = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[M \cap \sigma^*])$, où $M = \mathrm{Hom}_{gr.\,alg.}(T, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$. Notons $(x_{1,\sigma}, \cdots, x_{n,\sigma})$ la base duale de $(e_{1,\sigma}, \ldots, e_{n,\sigma})$. Les $(x_{i,\sigma})_{1 \leq i \leq n}$ sont naturellement des caractères de $T$ et forment un système de coordonnées locales sur $U_\sigma$. Nous notons $\varphi_\sigma$ l'isomorphisme sur $\mathbb{C}^n$ ainsi obtenu. L'action du tore est alors donnée par la formule $t.(x_{1,\sigma}, \ldots, x_{n,\sigma}) = (x_{1,\sigma}(t) x_{1,\sigma}, \cdots, x_{n,\sigma}(t) x_{n,\sigma})$. Aussi, les sections $s_{i,\sigma} = \varphi_\sigma^*(\partial_{x_{i,\sigma}}) \in H^0(U_\sigma, \mathcal{T}_X)$ sont semi-invariantes, engendrent le fibré tangent en tout point de $U_\sigma$ et sont respectivement associées aux caractères $(x_{i,\sigma})_{1 \leq i \leq n}$. On vérifie enfin qu'une section du fibré tangent semi-invariante relativement à l'un des caractères $x_{i,\sigma}$ est multiple de la section $s_{i,\sigma}$ correspondante. On peut trouver pour chaque fibré $L_i$, une section qui soit semi-invariante sout $T$ et qui engendre le fibré en tout point de $U_\sigma$. La somme directe de ces sections fournit donc une trivialisation du fibré $\mathcal{T}_X$ au dessus de l'ouvert $U_\sigma$ qui est définie par $n$ sections semi-invariantes. En évaluant ces sections en l'unique point fixe de $U_\sigma$, on vérifie que les caractères correspondants sont les $(x_{i,\sigma})_{1 \leq i \leq n}$. Il en résulte que chaque section $s_{i,\sigma}$ trivialise l'un des $L_j$. Par suite, si $\sigma'$ est un autre cône de dimension $n$, l'image de la droite $\mathbb{C}^* s_{i,\sigma|U_{\sigma\sigma'}}$ $(1 \leq i \leq n)$ par la fonction de transition $\varphi_{\sigma'} \varphi_\sigma^{-1}$ est l'une des droites $\mathbb{C}^* s_{i,\sigma'|U_{\sigma\sigma'}}$ $(1 \leq i \leq n)$. Autrement dit, la matrice associée à la fonction de transition $\varphi_{\sigma'} \varphi_\sigma^{-1}$ exprimée dans les bases $(s_{i,\sigma'|U_{\sigma\sigma'}})_{1 \leq i \leq n}$ et $(s_{i,\sigma|U_{\sigma\sigma'}})_{1 \leq i \leq n}$ n'a qu'un seul terme non nul par ligne et par colonne.

C'est ce résultat que nous allons maintenant exploiter. Considérons un cône $\tau \in \Delta(n-1)$ et soit $\sigma$ et $\sigma'$ les deux cônes de dimension $n$ séparés par $\tau$. Il existe donc une famille $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ d'éléments de $N$ et deux autres éléments de $N$, $e_n$ et $e_{n+1}$, tels que les familles $(e_1, \cdots, e_{n-1}, e_n)$ et $(e_1, \ldots, e_{n-1}, e_{n+1})$ soient des bases de $N$ et tels que l'on ait $\tau = \mathbb{R}^+ e_1 + \cdots + \mathbb{R}^+ e_{n-1}$, $\sigma = \tau + \mathbb{R}^+ e_n$ et $\sigma' = \tau + \mathbb{R}^+ e_{n+1}$. On a en outre une relation :

$$e_{n+1} + e_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i = 0,$$

où $\alpha_i \in \mathbb{Z}$. Notons $(x_1, \cdots, x_n)$ la base duale de la base $(e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n)$ et $(z_1, \cdots, z_n)$ la base duale de la base $(e_1, \ldots, e_{n-1}, e_{n+1})$. Le changement de cartes est alors donné par la formule :

$$(z_1, \cdots, z_n) \mapsto (\frac{z_1}{z_n^{\alpha_1}}, \cdots, \frac{z_{n-1}}{z_n^{\alpha_{n-1}}}, \frac{1}{z_n}).$$

La fonction de transition $\varphi_{\sigma\sigma'}$ est donc donnée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} z_n^{-\alpha_1} & 0 & \ldots\ldots & & 0 & -\alpha_1 z_1 z_n^{-\alpha_1 - 1} \\ 0 & z_n^{-\alpha_2} & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & z_n^{-\alpha_{n-1}} & -\alpha_{n-1} z_1 z_n^{-\alpha_{n-1}-1} \\ 0 & \ldots & \ldots\ldots & & 0 & -z_n^{-2} \end{pmatrix}$$

Il en résulte les égalités $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$ et donc $e_{n+1} = -e_n$.

Soit $e \in \Delta(1)$ et soit $\sigma \in \Delta(n)$ un cône dont $e$ est une face de dimension 1. On identifie le cône $e$ et l'élément primitif de $N$ qui le détermine. Alors il existe une base $(e_1 = e, \ldots, e_n)$ de $N$ telle que $\sigma = \mathbb{R}^+ e_1 + \ldots + \mathbb{R}^+ e_n$. Le cône $\mathbb{R}^+ e_2 + \ldots + \mathbb{R}^+ e_n$ est une face de dimension $n-1$ de $\sigma$ et donc d'après ce qui précède, on a que $-e \in \Delta(1)$ et que le cône $\mathbb{R}^+(-e_1) + \ldots + \mathbb{R}^+ e_n \in \Delta(n-1)$. Il en résulte que $\pm e_i \in \Delta(1)$ $(1 \leq i \leq n)$ et que tous les cônes possibles de dimension $n$ formés sur ces vecteurs sont des cônes de l'éventail $\Delta$. Si $e' \in \Delta(1)$, alors $e'$ est contenu dans l'un des cônes précédents et donc $e'$ est l'un des $(\pm e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et on a donc déterminé tous les cônes de dimension maximale, ce qui détermine $\Delta$ et termine la preuve du lemme. □

**Théorème** *Soit $X$ une variété torique projective lisse de dimension $2n+1$ ($n \geq 1$) munie d'une structure de contact.*

*Alors $X$ est soit isomorphe à l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^{2n+1}$, soit isomorphe à la variété $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1}(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1})$.*

*Démonstration* La preuve de ce théorème repose sur l'étude des contractions extrémales de $X$. Notons $T$ le tore agissant sur $X$. Puisque le diviseur canonique $K_X$ de $X$ n'est pas effectif, il existe une raie extrémale $R$ au sens de Mori engendrée par une courbe rationnelle lisse $C$ $T$-invariante. Puisque $K_X = -(n+1)L$, on a $\ell(R) = n+1$ ou $\ell(R) = 2n+2$, où $\ell(R)$ désigne la longueur de la raie extrémale $R$. Dans ce dernier cas, $X$ est de Fano et $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ ([W1] prop. 2.4). Il en résulte que $X$ est isomorphe à l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^{2n+1}$ ([O1] thm.7.1).

Il nous reste donc à étudier le cas où $\ell(R) = n+1$. Notons $X \xrightarrow{\phi} Y$ la contraction de Mori associée à la raie $R$, où $Y$ est une variété torique projective. Notons $T^{'}$ le tore agissant sur $Y$. Notons $A \subset X$ le lieu exceptionnel de $\phi$ et $B = \phi(A)$ :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & Y \\ \cup & & \cup \\ A & \xrightarrow{\phi_{|A}} & B \end{array}$$

Puisque la courbe $C$ est $T$-invariante, elle est contractée sur un point fixe $y \in B$ sous $T^{'}$. Le morphisme $\phi$ étant équivariant, la fibre $F = \phi^{-1}(y)$ au dessus de $y$ est donc $T$-invariante. Par suite, puisque cette fibre est irréductible, on en déduit que $F$ est une strate torique et donc que $F$ est lisse puisque $X$ l'est. La fibre $F$ est donc isomorphe à un espace projectif $\mathbb{P}^k$ $(k \geq 1)$ et, puisque $C$ est une strate torique de la variété torique $\mathbb{P}^k$, il en résulte que la courbe $C$ s'identifie à une droite de $\mathbb{P}^k$. Nous savons aussi qu'il existe une courbe rationnelle $C_1 \subset X$ telle que $C_1 \in R$ et $-K_X.C_1 = n+1$. Mais, puisqu'il existe un diviseur $D$ sur $X$ tel que $D.C = 1$ et puisque $R = \mathbb{R}^+[C]$, il en résulte facilement que $C \equiv C_1$, de sorte que $C.L = 1$. Par suite, on a $(F, L_{|F}) = (\mathbb{P}^k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1))$.

Puisque $H^0(\mathbb{P}^k, \Omega^1_{\mathbb{P}^k}(1)) = (0)$, la restriction de la forme de contact $\theta$ à $\mathbb{P}^k$ est nulle et on vérifie par un calcul en coordonnées locales que, pour tout $x \in \mathbb{P}^k$, le sous espace vectoriel $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^k}(x) \subset D(x)$ est totalement isotrope pour la forme alternée de contact qui, par hypothèse, est non-dégénérée. Il en résulte l'inégalité $k \leq n$ et donc l'égalité $k = n$ puisque $\dim F \geq \ell(R) - 1 = n$. Utilisant à nouveau l'inégalité de Wisniewski, on en déduit que la contraction est de type fibrée et donc que $Y$ est régulière, de dimension $n+1$ et que $\phi$ est lisse.

Considérons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_{X/Y} \longrightarrow \mathcal{T}_X \longrightarrow \phi^*\mathcal{T}_Y \longrightarrow 0$$

La flèche $\mathcal{T}_{X/Y} \longrightarrow L$ obtenue par composition avec la projection $\mathcal{T}_X \longrightarrow L$ étant identiquement nulle par le théorème de Grauert et les résultats ci-dessus, il existe une flèche surjective $\phi^*\mathcal{T}_Y \longrightarrow L \longrightarrow 0$ et donc un morphisme $X \longrightarrow \mathbb{P}_Y(\mathcal{T}_Y)$ au dessus de $Y$ qui induit un isomorphisme sur chaque fibre. Il en résulte que ce morphisme est en fait un isomorphisme. Le résultat découle alors des lemmes 1 et 2. $\square$

## Références


[B] A.Beauville, Fano Contact Manifolds and Nilpotent Orbits, Comment. Math. Helvet., à paraître

[D] V.I.Danilov, The geometry of toric varieties, Russian Math. Surveys **33**, 97–154, 1978

[F] W.Fulton, Introduction to Toric Varieties, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 131, 1993

[K] A.A.Klyachko, Equivariant Bundles on Toral Varieties, Math. USSR Izv. **35**, 337–375, 1990

[L] C.Lebrun, Fano manifolds, contact structures and quaternionic geometry, Int. journ. of Math. **6**, 419–437, 1995

[M] S.Mori, Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective, Ann. Math. **116**, 133–176, 1982

[O1] T.Oda, Lectures on Torus Embeddings and Applications, Tata Inst. of Fund. Research, 58, Springer, 1978

[O2] T.Oda, Convex Bodies and Algebraic Geometry, 15, Springer-Verlag, 1988

[R] M.Reid, Decomposition of toric morphism, dans Arithmetic and Geometry, papers dedicated to I.R. Shafarevitch on the occasion of his 60th birthday, Progress in Math. 36, Birkhäuser, 395–418, 1983

[W1] J.Wisniewski, Length of extremal rays and generalized adjonction, Math. Z. **200**, 409–427, 1989

[W2] J.Wisniewski, On contractions of extremal rays on Fano manifolds, J. reine u. angew Math. **417**, 141–157, 1991

[Y] Y-G.Ye, A note on complex projective threefolds admitting holomorphic contact structures, Invent. Math. **121**, 421–436, 1995