Structures de contact sur les variétés algébriques de dimension 5

Introduction

Une *structure de contact* sur une variété algébrique lisse est la donnée d'un sous-fibré $D \subset T_X$ de rang $\dim X - 1$ de sorte que la forme $\mathcal{O}_X$-bilinéaire sur D à valeurs dans le fibré en droites $L = T_X/D$ déduite du crochet de Lie sur T_X soit non dégénérée en tout point de X. Cela entraîne que X est de dimension impaire $2n+1$ et que le fibré canonique K_X est isomorphe à L^{-1-n}. On peut aussi définir la structure de contact par la donnée d'un élément $\theta \in H^0(X, \Omega^1_X \otimes L)$, la *forme de contact*, tel que $\theta \wedge (d\theta)^n$ soit partout non nul.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple. Son groupe adjoint G agit sur $\mathbf{P}(\mathfrak{g})$ et n'a qu'une seule orbite fermée; on montre que celle-ci admet une structure de contact ([Be] prop.2.6). Ce sont des variétés de Fano homogènes dont le groupe des automorphismes de contact a pour algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On parlera de la variété de contact homogène de type $\mathfrak{g}$. Les fibrés $\mathbf{P}_Y(T_Y)$, où Y est une variété lisse, fournissent d'autres exemples de variétés de contact. En dimension 3, Y-G.Ye a montré que ce sont les seules ([Y]). D'autres auteurs étudient les structures de contact sur les variétés de Fano ([Be], [L]), mais les résultats ne sont ici encore que partiels.

Le résultat principal de ce travail est le

THÉORÈME.—*Soit X une variété projective lisse de dimension 5 munie d'une structure de contact. Alors X est l'une des variétés précédentes sauf si le fibré canonique K_X est numériquement effectif et $\kappa(X) = -\infty$.*

Notons que le dernier cas ne devrait pas se produire par la conjecture d'Abondance ([KMM]).

1. Rappels

Soit X une variété projective lisse sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Le produit d'intersection entre 1-cycles et diviseurs met en dualité les deux espaces vectoriels réels :

$$N_1(X) = (\{\text{1-cycles}\}/\equiv) \otimes \mathbf{R} \text{ et } N^1(X) = (\{\text{diviseurs}\}/\equiv) \otimes \mathbf{R},$$

où $\equiv$ désigne l'équivalence numérique. La dimension commune de ces espaces vectoriels est appelée le *nombre de Picard* de X. On considère le cône $NE(X) \subset N_1(X)$ engendré par les classes des

1-cycles effectifs. Une *raie extrémale* est une demi-droite R dans $\overline{NE}(X)$, adhérence de $NE(X)$ dans $N_1(X)$, vérifiant $K_X.R^* < 0$ et telle que pour tout $Z_1, Z_2 \in \overline{NE}(X)$, si $Z_1 + Z_2 \in R$ alors $Z_1, Z_2 \in R$. Une *courbe rationnelle extrémale* est une courbe rationnelle irréductible C telle que $\mathbf{R}_+[C]$ soit une raie extrémale et $-K_X.C \leq \dim X + 1$. *Toute raie extrémale R est engendrée par une courbe rationnelle extrémale* et admet une *contraction*, *i.e.*, il existe une variété projective normale Y et un morphisme $X \xrightarrow{\phi} Y$, surjectif à fibres connexes, contractant les courbes irréductibles C telles que $[C] \in R$ (théorème de Kawamata-Shokurov).

Rappelons un résultat fondamental de J. Wisniewski ([W1], [W2]) sur le lieu exceptionnel d'une contraction extrémale. Soit F une composante irréductible d'une fibre non triviale d'une contraction élémentaire associée à la raie extrémale R. Nous appelons *lieu de R*, le lieu couvert par les courbes dont la classe d'équivalence numérique appartient à R. On a alors l'inégalité :

$$\dim F + \dim(\text{lieu de } R) \geq \dim X + \ell(R) - 1,$$

où $\ell(R)$ désigne la *longueur* de la raie extrémale R :

$$\ell(R) = \inf\{-K_X.C_0 | C_0 \text{ étant une courbe rationnelle et } C_0 \in R\}.$$

En particulier :

$$2\dim(\text{lieu de } R) \geq \dim X + \ell(R) - 1.$$

Nous terminons ces rappels par un théorème de structure ([AW1], [AW2]). Considérons une contraction extrémale $X \xrightarrow{\phi} Y$ d'une variété projective lisse. Soit L un fibré inversible ϕ-ample et $r \geq 1$ un entier. On dit que $K_X + rL$ *supporte la contraction* ϕ si ce fibré est trivial sur les fibres de ϕ. Soit $F = \phi^{-1}(y)$ une fibre de ϕ munie de sa structure de schéma réduite. On suppose qu'il existe un ouvert de Y contenant y tel que les fibres de ϕ au dessus de cet ouvert soient toutes de dimension au plus $\dim(F)$:

1. si $\dim(F) \leq r - 1$ alors Y est lisse en y et ϕ est un fibré projectif au voisinage de F,
2. si $\dim(F) = r$ alors Y est lisse au voisinage de y et :
   (a) si ϕ est birationnel alors ϕ est l'éclatement d'une sous variété lisse de Y de codimension $r + 1$,
   (b) si $\dim(Y) = \dim(X) - r$ alors ϕ est un fibré en quadriques,
   (c) si $\dim(Y) = \dim(X) - r + 1$ alors $r \leq \dim(X)/2$ et $F = \mathbf{P}^r$.

2. Preuve du théorème

PROPOSITION 1.—*Soit X une variété projective lisse de dimension $2n + 1$. On suppose que X est de dimension de Kodaira $\kappa(X) \geq 0$. Alors X ne possède aucune structure de contact.*

Démonstration.—Raisonnons par l'absurde et supposons que X soit munie d'une structure de contact. Il résulte des hypothèses, qu'il existe une variété projective lisse $\overline{X}$ et un morphisme $\overline{X} \xrightarrow{\pi} X$ génériquement fini tel que $h^0(\overline{X}, \overline{L}^{-1}) \geq 1$, où l'on a posé $\overline{L} = \pi^*(L)$. Considérons un ouvert $U \subset X$ non vide au dessus duquel π est étale et fini. La structure de contact sur X induit une structure de contact sur $\pi^{-1}(U)$ associée au fibré $\overline{L}$. Quitte à restreindre $\pi^{-1}(U)$, on peut supposer que $\overline{L}$ est trivialisé par une section globale $\overline{\theta} \in H^0(\overline{X}, \overline{L}^{-1}) \subset H^0(\overline{X}, \Omega^1_{\overline{X}})$. Sur cet ouvert, la structure de contact est donnée par la forme de contact $\overline{\theta}$, ce qui constitue la contradiction cherchée puisque $d(\overline{\theta}) = 0$. ∎

LEMME.—*Soit X une variété projective lisse de dimension $2n+1$ munie d'une structure de contact définie par la forme $\theta \in H^0(X, \Omega^1_X \otimes L)$. Soit $Y \subset X$ une sous-variété analytique complexe lisse telle que la restriction de la forme de contact à Y soit identiquement nulle. Alors la dimension de Y est au plus n.*

Démonstration.—On vérifie par un calcul en coordonnées locales que pour tout $y \in Y$, l'espace vectoriel $T_Y(y) \subset D(y)$ est un sous espace totalement isotrope pour la forme alternée de contact qui, par hypothèse, est non dégénérée. ∎

PROPOSITION 2.—*Soit X une variété de Fano de dimension 5 munie d'une structure de contact. On suppose que $b_2(X) = 1$. Alors X est soit isomorphe à l'espace projectif $\mathbf{P}^5$ soit à la variété de contact homogène de type G_2.*

Démonstration.—Le groupe de Picard de X est un $\mathbf{Z}$-module libre de rang 1 puisque $b_2(X) = 1$. Rappelons que nous avons la formule $K_X = -3L$ et que l'ordre de divisibilité de K_X est au plus 6. Il en résulte que soit L engendre $\mathrm{Pic}(X)$ soit $L = 2L_0$ où L_0 est un générateur du groupe de Picard de X. Dans ce dernier cas, X est isomorphe à l'espace projectif complexe $\mathbf{P}^{2n+1}$ par le critère de Kobayashi-Ochiai ([KO]).

Il nous reste donc à traiter le cas où L est un générateur de $\mathrm{Pic}(X)$. Dans ce cas, X est une variété de Mukai et le fibré L est très ample ([Mu] prop. 1, [Me]). En effet, lorsque X est un revêtement double de $\mathbf{P}^5$ ou d'une quadrique lisse de dimension 5, on vérifie que $H^0(X, \Omega^1_X \otimes L) = 0$ et donc X n'a aucune structure de contact. Par suite, X est homogène ([Be] cor. 1.8) et isomorphe à la variété de contact homogène de type G_2 ([Bo]). ∎

THÉORÈME 1.—*Soit X une variété projective lisse de dimension 5 munie d'une structure de contact. On suppose que le fibré canonique n'est pas numériquement effectif. Alors X est soit isomorphe à l'espace projectif $\mathbf{P}^5$, soit à $\mathbf{P}_Y(T_Y)$ où Y est une variété lisse de dimension 3, soit à la variété de contact homogène de type G_2.*

Démonstration.—La preuve de ce théorème repose sur l'étude des contractions extrémales de X. Soit R une raie extrémale de X. Puisqu'on a la formule $K_X = -3L$, $\ell(R) = 3$ ou 6. Dans le dernier cas, X est de Fano et $b_2(X) = 1$ ([W1]) et la proposition 1 permet de conclure.

Il nous reste à traiter le cas où $\ell(R) = 3$. Notons $X \xrightarrow{\phi} Y$ la contraction extrémale associée à R. Par l'inégalité de Wisniewski, la contraction est soit de type fibrée soit divisorielle. De plus, le fibré L est $\phi-$ample et $K_X + 3L$ supporte la contraction extrémale.

Etude des contractions de type fibrée. En utilisant à nouveau l'inégalité de Wisniewski on vérifie que $\dim(Y) \leq 3$ et que toute composante irréductible d'une fibre non triviale est de dimension au moins 2.

Cas 1 : dim(Y) = 3. Puisque ϕ est une contraction extrémale et $\dim(Y) > 1$, ϕ n'a pas de fibre de dimension 4. Par 2.(c), le morphisme ϕ ne peut avoir de fibre de dimension 3 et il en résulte donc que toutes les fibres de ϕ sont de dimension au plus 2, ce qui entraîne que Y est lisse et que ϕ est un fibré projectif par 1. Remarquons alors que $L_{|F} \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1)$ pour toute fibre F de ϕ et considérons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow T_{X/Y} \longrightarrow T_X \longrightarrow \phi^* T_Y \longrightarrow 0$$

La flèche $T_{X/Y} \longrightarrow L$ obtenue par composition avec la projection $T_X \longrightarrow L$ étant identiquement nulle par le théorème de Grauert et les résultats ci-dessus, il existe une flèche surjective $\phi^* T_Y \longrightarrow L \longrightarrow 0$ et donc un morphisme $X \longrightarrow \mathbf{P}_Y(T_Y)$ au dessus de Y qui induit un isomorphisme sur chaque fibre. Il en résulte que ce morphisme est en fait un isomorphisme, ce qui termine la preuve du théorème dans ce cas.

Cas 2 : dim(Y) = 2. Par le critère de Kobayashi-Ochiai ([KO]), une fibre générique lisse est une quadrique $\mathcal{Q} \subset \mathbf{P}^4$ de dimension 3. On vérifie que $L_{|\mathcal{Q}} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(1)$ et que $H^0(\mathcal{Q}, \Omega^1_{\mathcal{Q}}(1)) = 0$; ce cas est éliminé par le lemme.

Cas 3 : dim(Y) = 1. Une fibre générique lisse F de ϕ est une variété de Del Pezzo de dimension 4 et $L_{|F}$ est la polarisation naturelle. En utilisant la classification de T.Fujita ([F1], [F2], [F3]), on vérifie que $H^0(F, \Omega^1_F \otimes L_{|F}) = 0$ et le lemme permet de conclure.

Cas 4 : dim(Y) = 0. Dans ce cas X est de Fano et, puisque le nombre de Picard de X est 1, on a $b_2(X) = 1$ et on peut appliquer la proposition 1.

Etude des contractions divisorielles. Notons E le lieu exceptionnel de ϕ. C'est un diviseur irréductible. Par l'inégalité de Wisniewski, $\phi(E)$ est de dimension 0 ou 1.

Cas 1 : dim(ϕ(E)) = 1. Par 2(a), une fibre non triviale F de ϕ est un espace projectif $\mathbf{P}^3$ et $L_{|F} \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(1)$. Ce cas est à nouveau éliminé par le lemme.

Cas 2 : dim(ϕ(E)) = 0. Dans ce cas, E est soit isomorphe à $\mathbf{P}^4$, soit à une quadrique irréductible de dimension 4, soit à une variété de Del Pezzo de dimension 4 ([A]). Les deux premiers cas s'éliminent par le lemme. Dans le dernier cas, le fibré normal $N_{F|X}$ est $\mathcal{O}_F$. Par suite le schéma de Hilbert $Hilb_X$ est lisse au point F et de dimension 1. Puisque ϕ est extrémale, les déformations de F doivent être contractées par ϕ, ce qui constitue la contradiction cherchée. ∎

COROLLAIRE.–*Les seules variétés de Fano de dimension 5 admettant une structure de contact sont, à isomorphisme près,* $\mathbf{P}^5$, $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^3}(T_{\mathbf{P}^3})$ *et la variété de contact homogène de type* G_2.

Démonstration.–Le corollaire est une conséquence de la conjecture d'Hartshorne-Frenkel, démontrée par S.Mori ([Mo]). ∎

Références bibliographiques

[A] T. Ando, *On extremal rays of the higher dimensional varieties*, Invent. Math. 81 (1985), 347-357.

[AW1] M. Andreatta, J. Wisniewski, *A note on vanishing and applications*, Duke Math. J. 72 (1993), 739-755.

[AW2] M. Andreatta, J. Wisniewski, *A view on contractions of higher dimensional varieties*, Proc. Sympos. Pure Math. 62, Part 1 (1997), 153-183.

[Be] A. Beauville, *Fano Contact Manifolds and Nilpotent Orbits*, Comment. Math. Helvet. 73 (1998), 566-583.

[Bo] W.M. Boothby, *Homogeneous complex contact manifolds*, Proc. Symp. Proc. Math. 3 (1959), 144-154.

[F1] T. Fujita, *On the structure of polarized manifods with total deficiency one, I*, J. Math. Soc. Japan 32 (1980), 709-725.

[F2] T. Fujita, *On the structure of polarized manifods with total deficiency one II*, J. Math. Soc. Japan 33 (1981), 415-434.

[F3] T. Fujita, *On the structure of polarized manifods with total deficiency one III*, J. Math. Soc. Japan 36 (1984), 75-89.

[KO] S. Kobayashi, T. Ochiai, *Characterization of complex projective spaces and hyperquadrics*, J. Math. Kyoto Univ. 13 (1973), 31-47.

[KMM] Y. Kawamata, K. Matsuda, K. Matsuki, *Introduction to the minimal model problem*, Adv. Stud. Pure Math. 10 (1987), 283-360.

[L] C. Lebrun, *Fano manifolds, contact structures and quaternionic geometry*, Int. journ. of Math. 6 (1995), 419-437.

[Me] M. Mella, *Existence of good divisors on Mukai varieties*, J. Algebraic Geom. 8 (1999), 197-206.

[Mo] S. Mori, *Projective manifolds with ample tangent bundles*, Ann. of Math. 110 (1979), 593-606.

[Mu] S. Mukai, *Biregular classification of Fano 3-folds and Fano manifolds of coindex 3*, Proc. Nat. Sci. USA 86 (1989), 3000-3002.

[W1] J. Wisniewski, *Length of extremal rays and generalized adjonction*, Math. Zeit. 200 (1989), 409-427.

[W2] J. Wisniewski, *On contractions of extremal rays on Fano manifolds*, J. reine u. angew Math. 417 (1991), 141-157.

[Y] Y-G. Ye, *A note on complex projective threefolds admitting holomorphic contact structures*, Invent. Math. 121 (1995), 421-436.