

Classes de Chern des variétés uniréglées

Stéphane Druel

Received: 9 August 2005 / Revised: 9 February 2006

Published online: 19 May 2006 – © Springer-Verlag 2006

Mathematics Subject Classification (2000): 14C99, 14M99

Mots clés Variété uniréglée, classes de Chern

1. Introduction

Soit X une variété compacte de type kählérien. Si X possède une métrique de Kähler-Einstein et si ω est une forme de Kähler-Einstein alors sa première classe de Chern $c_1(X) := c_1(T_X) \in H^2(X, \mathbb{C})$ est négative, nulle ou positive et (voir [CO75])

$$\int_X (2(n+1)c_2(X) - nc_1(X)^2) \wedge \omega^{n-2} \geq 0.$$

Si l'inégalité précédente est une égalité, alors le revêtement universel de X est isomorphe à $\mathbb{P}^n$, $\mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{B}^n$ (voir [Ti02] Theorem 2.13). Si (X, ω) est une variété compacte kählérienne alors X possède une métrique de Kähler-Einstein si $c_1(X) = 0$ (voir [Ya78]) ou si $c_1(X) < 0$ (voir [Au76] et [Ya78]). Si $c_1(X) > 0$, on connaît des obstructions à l'existence de métriques de Kähler-Einstein mais pas de condition nécessaire et suffisante assurant l'existence de telles métriques (voir [Ti02]).

Nous démontrons des résultats d'effectivité formellement analogues lorsque X est projective et uniréglée et étudions les cas d'égalité. Rappelons que toute variété de Fano est uniréglée. L'anneau de Chow des cycles algébriques modulo l'équivalence rationnelle est un invariant important des variétés algébriques projectives et il est assez mal compris en général. Nos résultats montrent que certains cycles formellement analogues aux cycles considérés ci-dessus sont effectifs.

S. DRUEL

Institut Fourier, UMR 5582 du CNRS,
Université Joseph Fourier, BP 74, 38402
Saint Martin D'Hères, France
(e-mail: druel@ujf-grenoble.fr)

2. Énoncés des résultats

2.1. Notations et hypothèses

Soit X une variété algébrique connexe, projective et lisse sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Supposons X uniréglée, autrement dit, supposons que X soit dominée par un produit $\mathbf{P}^1 \times Y$ où Y est une variété algébrique complexe de dimension $\dim(X) - 1$.

Une famille couvrante de courbes rationnelles est une composante irréductible H du schéma des morphismes génériquement injectifs de $\mathbf{P}^1$ dans X telle que le morphisme d'évaluation $\mathbf{P}^1 \times H \longrightarrow X$ soit dominant (voir 5.4).

Une telle famille de courbes rationnelles existe puisque X est uniréglée. Pour x dans X , soit H_x le sous-schéma fermé de H formé des morphismes de $\mathbf{P}^1$ dans X qui envoient 0 sur x . Soit $G_0 \subset \mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ le stabilisateur de $0 \in \mathbf{P}^1$. Le groupe G_0 opère librement sur H_x par la formule $g \cdot f = f \circ g^{-1}$ où $g \in G_0$ et $[f] \in H_x$. Il opère diagonalement sur $\mathbf{P}^1 \times H_x$. Pour x général dans X , notons $V_x := H_x // G_0$ et $U_x := (\mathbf{P}^1 \times H_x) // G_0$ les quotients géométriques et π_x et ι_x

$$\begin{array}{ccc} U_x & \xrightarrow{\iota_x} & X \\ \pi_x \downarrow & & \\ V_x & & \end{array}$$

les morphismes naturels. Soit $\ell := c_1(X) \cdot f_* \mathbf{P}^1$ où $[f] \in H$. L'entier ℓ est au moins égal à 2, U_x et V_x sont lisses de dimension $\ell - 1$ et $\ell - 2$ respectivement (voir paragraphe 3).

La famille H est dite *minimale* si, pour x général dans X , le schéma V_x est propre sur $\mathbf{C}$ (voir 5.6), ce que nous supposons maintenant. Le morphisme ι_x est alors génériquement fini ([De01] Proposition 3.2).

Remarque 2.2. Il suffit, par exemple, de considérer une famille couvrante de courbes rationnelles de degré minimal relativement à une polarisation donnée.

Rappelons qu'une application rationnelle $\varphi : Y \dashrightarrow Z$ est dite *presque régulière* s'il existe un ouvert non vide dense Y_0 de Y , un sous-schéma Z_0 de Z tels que φ se restreigne en un morphisme $Y_0 \longrightarrow Z_0$ propre.

Théorème. (voir Théorèmes 5.8 et 5.9 et Proposition 5.10). *Sous les hypothèses 2.1, si $x \in X$ est général et si U'_x est une composante irréductible de U_x alors le cycle*

$$\iota_{x*}(U'_x) \cdot \left(c_2(X) - \frac{\ell - 1}{2\ell} c_1(X)^2 \right) \in A_{\ell-3}(X) \otimes \mathbf{Q}$$

est effectif. Il est nul si et seulement s'il existe un morphisme fini $\widehat{X} \longrightarrow X$ et une application rationnelle presque régulière $\varphi : \widehat{X} \dashrightarrow Z$ dont les fibres

générales sont des espaces projectifs sur $\mathbf{C}$ de dimension $\ell - 1$, tels que les courbes rationnelles considérées soient les images dans X des droites contenues dans les fibres de φ . S'il n'est pas nul, alors le cycle

$$\iota_{x*}(U'_x) \cdot \left(c_2(X) - \left(\frac{\ell-1}{2\ell} + \frac{1}{\ell^2} \right) c_1(X)^2 \right) \in A_{\ell-3}(X) \otimes \mathbf{Q}$$

est effectif.

Remarques 2.3. Le cycle $\iota_{x*}(U'_x) \cdot c_1(X)^2$ est également effectif pour x général dans X (voir Théorème 5.8).

Remarquons que si $X = \mathbf{P}^{\ell-1}$ et que les courbes paramétrées par H sont des droites alors le cycle

$$\iota_{x*}(U'_x) \cdot \left(c_2(X) - \frac{\ell-1}{2\ell} c_1(X)^2 \right)$$

est nul et que si X est une quadrique lisse de $\mathbf{P}^{\ell+1}$ et que les courbes paramétrées par H sont encore des droites alors le cycle

$$\iota_{x*}(U'_x) \cdot \left(c_2(X) - \left(\frac{\ell-1}{2\ell} + \frac{1}{\ell^2} \right) c_1(X)^2 \right)$$

est nul.

Si C est une courbe connexe, projective et lisse sur $\mathbf{C}$ et si $X_\ell := \mathbf{P}^{\ell-1} \times C$ alors

$$c_2(X_\ell) - \frac{\ell-1}{2\ell} c_1(X_\ell)^2 = \frac{1}{\ell} c_1(\mathbf{P}^{\ell-1}) \cdot c_1(C).$$

Si le genre de C est ≥ 2 et si $\ell \geq 2$ alors le cycle

$$c_2(X_\ell) - \frac{\ell-1}{2\ell} c_1(X_\ell)^2$$

n'est pas effectif dans $A_{\ell-2}(X_\ell) \otimes \mathbf{Q}$.

Question 2.4. Sous les hypothèses 2.1, si pour un point $x \in X$ général le cycle

$$\iota_{x*}(U_x) \cdot \left(c_2(X) - \left(\frac{\ell-1}{2\ell} + \frac{1}{\ell^2} \right) c_1(X)^2 \right) \in A_{\ell-3}(X) \otimes \mathbf{Q}$$

est nul, existe-t-il un morphisme fini $\widehat{X} \rightarrow X$ et une application rationnelle presque régulière $\varphi : \widehat{X} \dashrightarrow Z$ dont les fibres générales sont des quadriques lisses sur $\mathbf{C}$ de dimension ℓ , tels que les courbes rationnelles considérées soient les images dans X des droites contenues dans les fibres de φ ?

Si $x \in X$ est général, la description globale du fibré tangent de V_x (voir Proposition 3.7) et le calcul de $c_1(V_x)$ sont également donnés (voir Proposition 4.3).

3. Fibré tangent des schémas de morphismes

3.1. Soit X une variété connexe, projective et lisse sur $\mathbf{C}$. Soit n la dimension de X et supposons $n \geq 1$.

Soient $\mathrm{Hom}(\mathbf{P}^1, X)$ le schéma localement quasi-projectif sur $\mathbf{C}$ des morphismes de $\mathbf{P}^1$ vers X et $\mathrm{Hom}(\mathbf{P}^1, X, 0 \mapsto x) \subset \mathrm{Hom}(\mathbf{P}^1, X)$ le sous-schéma fermé des morphismes $f : \mathbf{P}^1 \longrightarrow X$ tels que $f(0) = x$ où $x \in X$ est donné (voir [Mo79] Proposition 1).

Un morphisme non constant $f : \mathbf{P}^1 \longrightarrow X$ est dit libre si $H^1(\mathbf{P}^1, f^*T_X(-1)) = 0$, autrement dit, si $f^*T_X \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_n)$ avec $a_1 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$ (voir [Ko96] Définition II 3.1).

Soient enfin $H^1 \subset \mathrm{Hom}(\mathbf{P}^1, X)$ l'ouvert des morphismes libres (voir [Ko96] Corollary II 3.5.4) et, pour x dans X , $H_x^1 := \mathrm{Hom}(\mathbf{P}^1, X, 0 \mapsto x) \cap H^1$.

Le schéma H_x^1 est lisse sur $\mathbf{C}$ de dimension $h^0(\mathbf{P}^1, f^*T_X \otimes I_0)$ en $[f] \in H_x^1$ (voir [Mo79] Proposition 2) où I_0 est l'idéal de 0 dans $\mathbf{P}^1$.

Soient ev_x , p_x et q_x

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}^1 & \xleftarrow{p_x} & \mathbf{P}^1 \times H_x^1 & \xrightarrow{ev_x} & X \\ & & \downarrow q_x & & \\ & & H_x^1 & & \end{array}$$

les morphismes naturels.

Proposition 3.2. *Le fibré tangent du schéma H_x^1 est naturellement isomorphe au fibré*

$$q_{x*} (ev_x^*T_X \otimes p_x^*I_0).$$

Démonstration. La restriction de la différentielle de ev_x à $q_x^*T_{H_x^1}$ est identiquement nulle le long de $p_x^{-1}(0) \subset \mathbf{P}^1 \times H_x^1$ et définit donc un morphisme

$$q_x^*T_{H_x^1} \longrightarrow ev_x^*T_X \otimes p_x^*I_0$$

et, en prenant les images directes par q_x , un morphisme

$$T_{H_x^1} \longrightarrow q_{x*} (ev_x^*T_X \otimes p_x^*I_0)$$

dont nous allons montrer qu'il est l'isomorphisme cherché.

L'espace tangent de Zariski à H_x^1 en $[f]$ s'identifie naturellement à $H^0(\mathbf{P}^1, f^*T_X \otimes I_0)$ (voir [Mo79] Proposition 2) et la différentielle de l'application ev_x en $(t, [f]) \in \mathbf{P}^1 \times H_x^1$ (voir [Ko96] Proposition II 3.4) est l'application

$$T_{\mathbf{P}^1, t} \oplus H^0(\mathbf{P}^1, f^*T_X \otimes I_0) \longrightarrow T_{X, f(t)}$$

donnée par

$$(v, s) \mapsto df_t(v) + s(t),$$

où $v \in T_{\mathbf{P}^1, t}$ et $s \in H^0(\mathbf{P}^1, f^*T_X \otimes I_0)$. La composée de l'application

$$H^0(\mathbf{P}^1, f^*T_X \otimes I_0) \simeq T_{H^1, [f]} \longrightarrow (q_{x*}(ev_x^*T_X \otimes p_x^*I_0)) \otimes k([f])$$

et de l'application naturelle d'évaluation des sections

$$\varphi_{[f]} : (q_{x*}(ev_x^*T_X \otimes p_x^*I_0)) \otimes k([f]) \longrightarrow H^0(\mathbf{P}^1, f^*T_X \otimes I_0)$$

est donc l'identité de $H^0(\mathbf{P}^1, f^*T_X \otimes I_0)$.

Il reste à remarquer que la formation de l'image directe $q_{x*}(ev_x^*T_X \otimes p_x^*I_0)$ commute aux changements de bases, autrement dit, que l'application $\varphi_{[f]}$ est un isomorphisme (voir [Ha77] III Corollary 12.9).

Remarque 3.3. Soient ev et q

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}^1 \times H^1 & \xrightarrow{ev} & X \\ q \downarrow & & \\ H^1 & & \end{array}$$

les morphismes naturels. La preuve de la proposition suivante est analogue à celle de la proposition 3.2.

Proposition 3.4. *Le fibré tangent du schéma H^1 est naturellement isomorphe au fibré $q_*ev^*T_X$.*

3.5. Soient $H^b \subset \text{Hom}(\mathbf{P}^1, X)$ l'ouvert des morphismes génériquement injectifs, et pour x dans X , $H_x^b := \text{Hom}(\mathbf{P}^1, X, 0 \mapsto x) \cap H^b$.

Soient $G := \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ et $G_0 \subset G$ le stabilisateur de $0 \in \mathbf{P}^1$. Le groupe G_0 opère sur H_x par la formule $g \cdot f = f \circ g^{-1}$ où $g \in G_0$ et $[f] \in H_x$. Il opère diagonalement sur $\mathbf{P}^1 \times H_x$.

L'ouvert $H_x^{b,1} := H_x^b \cap H_x^1$ est stable sous G_0 et l'action de G_0 sur $H_x^{b,1}$ est libre au sens de la théorie géométrique des invariants : le morphisme $G_0 \times H_x^{b,1} \longrightarrow H_x^{b,1} \times H_x^{b,1}$ est en effet propre, radiciel (puisque les morphismes considérés sont génériquement injectifs) et non ramifié (voir [Mo79] Lemma 9). De plus, les quotients géométriques

$$V_x^{b,1} := H_x^{b,1} // G_0 \quad \text{et} \quad U_x^{b,1} := (\mathbf{P}^1 \times H_x^{b,1}) // G_0$$

existent et les schémas $H_x^{b,1}$ et $\mathbf{P}^1 \times H_x^{b,1}$ sont des fibrés principaux de groupe G_0 au-dessus des quotients $V_x^{b,1}$ et $U_x^{b,1}$ respectivement (voir [Mo79] Lemma 9). Les schémas $V_x^{b,1}$ et $U_x^{b,1}$ sont en particulier lisses sur $\mathbb{C}$. Soient π_x et ι_x

$$\begin{array}{ccc} U_x^{b,1} & \xrightarrow{\iota_x} & X \\ \pi_x \downarrow & & \\ V_x^{b,1} & & \end{array}$$

les morphismes naturels : π_x est une fibration en droites projectives complexes. Soit enfin $\sigma_x \subset U_x^{b,l}$ la section de π_x , quotient géométrique de $\{0\} \times H_x^{b,l}$ par le groupe G_0 . La section σ_x est contractée par ι_x sur $x \in X$.

Notation 3.6. Le fibré tangent relatif $T_{Y/Z}$ d'un morphisme lisse $g : Y \rightarrow Z$ sera noté T_g .

Proposition 3.7. Le fibré tangent du schéma $V_x^{b,l}$ est naturellement isomorphe au fibré

$$\pi_{x*} \left(\left((\iota_x^* T_X) / T_{\pi_x} \right) (-\sigma_x) \right),$$

où l'on a identifié $T_{\pi_x} \subset T_{U_x^{b,l}}$ à son image dans $\iota_x^* T_X$ via la différentielle de l'application ι_x .

Démonstration. Notons r_x et s_x

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{P}^1 & \xleftarrow{p_x} & \mathbf{P}^1 \times H_x^{b,l} & \xrightarrow{r_x} & U_x^{b,l} \xrightarrow{\iota_x} X \\ & & \downarrow q_x & & \downarrow \pi_x \\ & & H_x^{b,l} & \xrightarrow{s_x} & V_x^{b,l} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{ev}_x \\ \curvearrowright \end{array}$$

les morphismes de passage au quotient. Le fibré vectoriel $s_x^* T_{V_x^{b,l}}$ s'identifie, via la différentielle de s_x , au conoyau de l'application

$$T_{s_x} \rightarrow T_{H_x^{b,l}}.$$

La différentielle de l'action de G_0 sur $H_x^{b,l}$ en $(e, [f]) \in G_0 \times H_x^{b,l}$ est l'application

$$H^0(\mathbf{P}^1, T_{\mathbf{P}^1} \otimes I_0) \oplus H^0(\mathbf{P}^1, f^* T_X \otimes I_0) \rightarrow H^0(\mathbf{P}^1, f^* T_X \otimes I_0)$$

donnée par

$$(x, y) \mapsto y - f_* x,$$

où $x \in H^0(\mathbf{P}^1, T_{\mathbf{P}^1} \otimes I_0)$ et $y \in H^0(\mathbf{P}^1, f^* T_X \otimes I_0)$. La formation des images directes $q_{x*}(T_{q_x} \otimes p_x^* I_0)$ et $q_{x*}(ev_x^* T_X \otimes p_x^* I_0)$ commute aux changements de bases, autrement dit, les applications naturelles

$$(q_{x*}(T_{q_x} \otimes p_x^* I_0)) \otimes k([f]) \rightarrow H^0(\mathbf{P}^1, T_{\mathbf{P}^1} \otimes I_0)$$

et

$$(q_{x*}(ev_x^* T_X \otimes p_x^* I_0)) \otimes k([f]) \rightarrow H^0(\mathbf{P}^1, f^* T_X \otimes I_0)$$

sont des isomorphismes (*voir* [Ha77] III Corollary 12.9). Le sous-fibré vectoriel

$$T_{s_x} \subset T_{H_x^{b,l}}$$

s'identifie donc au sous-fibré vectoriel

$$q_{x*} (T_{q_x} \otimes p_x^* I_0) \subset q_{x*} (ev_x^* T_X \otimes p_x^* I_0),$$

via l'identification $T_{H_x^{b,l}} \simeq q_{x*} (ev_x^* T_X \otimes p_x^* I_0)$ donnée par la proposition 3.2. Ces identifications sont G_0 -équivariantes. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}^1 \times H_x^{b,l} & \xrightarrow{r_x} & U_x^{b,l} \\ q_x \downarrow & & \downarrow \pi_x \\ H_x^{b,l} & \xrightarrow{s_x} & V_x^{b,l} \end{array}$$

est un carré cartésien dans la catégorie des G_0 -schémas puisque l'action de G_0 sur $H_x^{b,l}$ est libre. La restriction de la différentielle de r_x à T_{q_x} induit un isomorphisme équivariant de T_{q_x} sur $r_x^* T_{\pi_x}$. Le morphisme s_x étant plat, l'application

$$\begin{aligned} q_{x*} r_x^* (T_{\pi_x}(-\sigma_x)) &\simeq q_{x*} (T_{q_x} \otimes p_x^* I_0) \longrightarrow q_{x*} (ev_x^* T_X \otimes p_x^* I_0) \\ &\simeq q_{x*} r_x^* ((\iota_x^* T_X)(-\sigma_x)) \end{aligned}$$

s'identifie donc à l'application

$$s_x^* \pi_{x*} (T_{\pi_x}(-\sigma_x)) \longrightarrow s_x^* \pi_{x*} ((ev_x^* T_X)(-\sigma_x))$$

de façon équivariante. L'isomorphisme équivariant

$$s_x^* T_{V_x^{b,l}} \simeq s_x^* \pi_{x*} \left(((\iota_x^* T_X)/T_{\pi_x})(-\sigma_x) \right)$$

descend en l'isomorphisme cherché

$$T_{V_x^{b,l}} \simeq \pi_{x*} (((\iota_x^* T_X)/T_{\pi_x})(-\sigma_x)).$$

Remarque 3.8. Le groupe G opère librement sur $H^{b,l}$ par la formule $g \cdot f = f \circ g^{-1}$ où $g \in G$ et $[f] \in H^{b,l}$ (*voir* [Mo79] Lemma 9). Il opère diagonalement sur $\mathbf{P}^1 \times H^{b,l}$. Les quotients géométriques $V^{b,l} := H^{b,l}/G$ et $U^{b,l} := (\mathbf{P}^1 \times H^{b,l})/G$ existent et les schémas $H^{b,l}$ et $\mathbf{P}^1 \times H^{b,l}$ sont des fibrés principaux de groupe G au-dessus des quotients $V^{b,l}$ et $U^{b,l}$ respectivement (*voir* [Mo79] Lemma 9). Les schémas $V^{b,l}$ et $U^{b,l}$ sont donc lisses sur $\mathbf{C}$. Soient π et ι

$$\begin{array}{ccc} U^{b,l} & \xrightarrow{\iota} & X \\ \pi \downarrow & & \\ V^{b,l} & & \end{array}$$

les morphismes naturels. Le morphisme π est une fibration en droites projectives complexes. La preuve de la proposition suivante est analogue à celle de la proposition 3.7.

Proposition 3.9. *Le fibré tangent du schéma $V_x^{b,1}$ est naturellement isomorphe au fibré $\pi_*((\iota^*T_X)/T_\pi)$, où l'on a identifié $T_\pi \subset T_{U_x^{b,1}}$ à son image dans ι^*T_X via la différentielle de l'application ι .*

4. Un calcul de classe de Chern

Convention 4.1. *Si F est un fibré vectoriel sur un schéma Y , $\mathbf{P}_Y(F)$ est le schéma $\text{Proj}(S^\bullet(F))$.*

4.2. Nous reprenons les notations de la section précédente. Soit E_x le fibré vectoriel de rang 2 sur $V_x^{b,1}$ donné par $E_x := \pi_{x*}\mathcal{O}_{U_x^{b,1}}(\sigma_x)$. La section σ_x de π_x correspond à la donnée d'un quotient inversible M_x de E_x . Le fibré E_x est une extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{V_x^{b,1}} \longrightarrow E_x \longrightarrow M_x \longrightarrow 0$$

du fibré inversible M_x par le fibré trivial $\mathcal{O}_{V_x^{b,1}}$ et $c_2(E_x) = 0$. Soit $L_x := M_x^{\otimes -1}$. Le schéma $U_x^{b,1}$ s'identifie au fibré projectif $\mathbf{P}_{V_x^{b,1}}(E_x)$ au-dessus de $V_x^{b,1}$ et l'idéal de σ_x dans $U_x^{b,1}$ s'identifie au fibré tautologique $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_{V_x^{b,1}}(E_x)}(-1)$.

Soit $[f] \in H_x^{b,1}$ et soit $\ell := c_1(X) \cdot f_*(\mathbf{P}^1) \geq 2$. Le fibré en droites $\iota_x^*\omega_X$ est de degré $-\ell$ sur les fibres de π_x et trivial sur σ_x . Il est donc isomorphe au produit de ℓ copies du fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_{V_x^{b,1}}(E_x)}(-1) \otimes \pi_x^*M_x$.

Proposition 4.3. *La première classe de Chern de $V_x^{b,1}$ est donnée par la formule*

$$c_1(V_x^{b,1}) = \pi_{x*}\iota_x^* \left(\left(\frac{\ell + 1}{2\ell} - \frac{1}{\ell^2} \right) c_1(X)^2 - c_2(X) \right) \in \text{Pic}(V_x^{b,1}) \otimes \mathbf{Q}.$$

Démonstration. Soient $A(V_x^{b,1})$ l'anneau de Chow de $V_x^{b,1}$ et $K(V_x^{b,1})$ son anneau de Grothendieck. Soient $\text{ch} : K(V_x^{b,1}) \rightarrow A(V_x^{b,1})$ le caractère de Chern exponentiel et $\text{td}(T_{\pi_x}) \in A(U_x^{b,1})$ la classe de Todd du fibré tangent T_{π_x} à π_x . La formule utile est la formule de Grothendieck-Riemann-Roch (voir [Fu98] Theorem 15.2) :

$$\begin{aligned} & \text{ch}(\pi_{x!}(((\iota_x^*T_X)/T_{\pi_x})(-\sigma_x))) \\ &= \pi_{x*}(\text{ch}(((\iota_x^*T_X)/T_{\pi_x})(-\sigma_x)) \cdot \text{td}(T_{\pi_x})) \in A(V_x^{b,1}) \otimes \mathbf{Q}. \end{aligned}$$

Rappelons que les morphismes paramétrés par $H_x^{b,1}$ sont libres. Le faisceau

$$R^1\pi_{x*}(((\iota_x^*T_X)/T_{\pi_x})(-\sigma_x))$$

est donc nul,

$$\pi_{x!}(((\iota_x^*T_X)/T_{\pi_x})(-\sigma_x)) = \pi_{x*}(((\iota_x^*T_X)/T_{\pi_x})(-\sigma_x))$$

et, d'après la proposition 3.7,

$$\text{ch}(\pi_{x!}(((\iota_x^*T_X)/T_{\pi_x})(-\sigma_x))) = \text{ch}(T_{V_x^{b,1}}).$$

La première classe de Chern de $V_x^{\text{b,l}}$ est donc donnée par la formule

$$c_1(V_x^{\text{b,l}}) = \text{ch}\left(T_{V_x^{\text{b,l}}}\right)_1 = \pi_{x*}\left(\text{ch}\left(\left(\iota_x^* T_X\right)/T_{\pi_x}\right)(-\sigma_x)\right) \cdot \text{td}(T_{\pi_x})_2.$$

Il reste à calculer la composante de codimension 2 du cycle

$$\begin{aligned} & \text{ch}\left(\left(\iota_x^* T_X\right)/T_{\pi_x}\right)(-\sigma_x) \cdot \text{td}(T_{\pi_x}) \\ &= (\iota_x^* \text{ch}(T_X) - \text{ch}(T_{\pi_x})) \cdot \text{ch}\left(\mathcal{O}_{U_x^{\text{b,l}}}(-\sigma_x)\right) \cdot \text{td}(T_{\pi_x}). \end{aligned}$$

La formule

$$\iota_x^* c_1(X) = \ell(\sigma_x + \pi_x^* c_1(L_x))$$

ainsi que les formules

$$\iota_x^* c_1(X) \cdot \sigma_x = 0$$

et

$$\sigma_x^2 = p^* c_1(E_x) \cdot \sigma_x - c_2(E_x) = -\sigma_x \cdot \pi_x^* c_1(L_x) \quad (\text{voir [Fu98] Remark 3.2.4})$$

donnent

$$\sigma_x \cdot \pi_x^* c_1(L_x) = \frac{1}{\ell^2} \iota_x^* c_1(X)^2 - \pi_x^* c_1(L_x)^2$$

et

$$\iota_x^* c_1(X) \cdot \pi_x^* c_1(L_x) = \frac{1}{\ell^2} \iota_x^* c_1(X)^2.$$

Le calcul donne (voir [Fu98] Example 3.2.3 et Example 3.2.4) :

$$\begin{aligned} \text{ch}\left(\mathcal{O}_{U_x^{\text{b,l}}}(-\sigma_x)\right)_{\leq 2} &= 1 - \sigma_x + \frac{1}{2} \sigma_x^2 \\ &= 1 - \sigma_x + \frac{1}{2} (\pi_x^* c_1(L_x)^2 - \frac{1}{\ell^2} \iota_x^* c_1(X)^2), \\ \text{ch}(T_{\pi_x})_{\leq 2} &= 1 + 2\sigma_x + \pi_x^* c_1(L_x) \\ &\quad + \frac{1}{2} (4\sigma_x^2 + \pi_x^* c_1(L_x)^2 + 4\sigma_x \cdot \pi_x^* c_1(L_x)) \\ &= 1 + 2\sigma_x + \pi_x^* c_1(L_x) + \frac{1}{2} \pi_x^* c_1(L_x)^2, \\ \text{td}(T_{\pi_x})_{\leq 2} &= 1 + \sigma_x + \frac{1}{2} \pi_x^* c_1(L_x) \\ &\quad + \frac{1}{12} (4\sigma_x^2 + \pi_x^* c_1(L_x)^2 + 4\sigma_x \cdot \pi_x^* c_1(L_x)) \\ &= 1 + \sigma_x + \frac{1}{2} \pi_x^* c_1(L_x) + \frac{1}{12} \pi_x^* c_1(L_x)^2, \end{aligned}$$

et

$$\iota_x^* \text{ch}(\mathbf{T}_X)_{\leq 2} = \iota_x^* \left(n + c_1(\mathbf{X}) + \frac{1}{2} (c_1(\mathbf{X})^2 - 2c_2(\mathbf{X})) \right).$$

Finalement,

$$\begin{aligned} & (\text{ch}(((\iota_x^* \mathbf{T}_X) / \mathbf{T}_{\pi_x}) (-\sigma_x)) \cdot \text{td}(\mathbf{T}_{\pi_x}))_2 \\ &= \iota_x^* \left(\left(\frac{\ell + 1}{2\ell} - \frac{1}{\ell^2} \right) c_1^2(\mathbf{X}) - c_2(\mathbf{X}) \right) + \frac{n-1}{12} \pi_x^* c_1(\mathbf{L}_x)^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} c_1(\mathbf{V}_x^{\text{b},1}) &= \pi_{x*} (\text{ch}(((\iota_x^* \mathbf{T}_X) / \mathbf{T}_{\pi_x}) (-\sigma_x)) \cdot \text{td}(\mathbf{T}_{\pi_x}))_2 \\ &= \pi_{x*} \iota_x^* \left(\left(\frac{\ell + 1}{2\ell} - \frac{1}{\ell^2} \right) c_1^2(\mathbf{X}) - c_2(\mathbf{X}) \right) \in \text{Pic}(\mathbf{V}_x^{\text{b},1}) \otimes \mathbf{Q}. \end{aligned}$$

□

Remarque 4.4. L'extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{V}_x^{\text{b},1}} \longrightarrow \mathbf{E}_x \longrightarrow \mathbf{M}_x \longrightarrow 0$$

est scindée. Soit α sa classe dans $H^1(\mathbf{V}_x^{\text{b},1}, \mathbf{L}_x)$. La restriction $\pi_{x|\sigma_x}$ de π_x à σ_x est un isomorphisme de σ_x sur $\mathbf{V}_x^{\text{b},1}$. Nous noterons encore $\mathbf{L}_x$ le fibré $\pi_{x|\sigma_x}^* \mathbf{L}_x$ et α la classe $\pi_{x|\sigma_x}^* \alpha \in H^1(\sigma_x, \mathbf{L}_x)$.

Lemme 4.5. ([voir [Dr04] Lemmes 3.2 et 3.3]) *La classe du fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_{\mathbf{V}_x^{\text{b},1}}(\mathbf{E}_x)}(1) \otimes \pi_x^* \mathbf{L}_x$ dans*

$$\text{Pic}(2\sigma_x) \simeq \text{Pic}(\sigma_x) \oplus H^1(\sigma_x, \mathbf{L}_x)$$

est $(0, \alpha)$.

Le fibré $\left(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_{\mathbf{V}_x^{\text{b},1}}(\mathbf{E}_x)}(-1) \otimes \pi_x^* \mathbf{M}_x \right)^{\otimes \ell}$ est isomorphe au fibré $\iota_x^* \omega_X$. La classe $\ell\alpha$ est donc nulle et α l'est aussi.

5. Démonstration des résultats

Lemme 5.1. *Soit Y une variété algébrique connexe, projective et lisse sur $\mathbf{C}$. Soit E un fibré vectoriel de rang 2 sur Y , extension d'un fibré en droites M par le fibré trivial $\mathcal{O}_Y$. Soient $Z := \mathbf{P}_Y(E)$ et $p : Z \longrightarrow Y$ le morphisme naturel. Soit $\sigma \subset Z$ la section de p correspondant au quotient inversible M de E . Supposons qu'il existe une variété algébrique X projective et lisse sur $\mathbf{C}$ et un morphisme $q : Z \longrightarrow X$ qui contracte σ sur un point de X . Si β est un cycle de codimension pure $k > 0$ sur X alors*

$$q_*(Z) \cdot \beta = q_*(p^* \alpha \cdot (\sigma - p^* c_1(M)))$$

où $\alpha = p_ q^* \beta$ est un cycle de codimension $k - 1$ sur Y .*

Démonstration. L'anneau $A(Z)$ est un module libre sur $A(Y)$ engendré par la classe fondamentale de Z et la première classe de Chern du fibré tautologique (voir [Fu98] Theorem 3.3). Ici, la première classe de Chern du fibré tautologique est σ et

$$\sigma^2 = p^*c_1(E) \cdot \sigma - c_2(E) = p^*c_1(M) \cdot \sigma \quad (\text{voir [Fu98] Remark 3.2.4}).$$

Le cycle $q^*\beta$ s'écrit donc

$$q^*\beta = p^*\gamma \cdot \sigma + p^*\delta$$

avec $\gamma \in A^{k-1}(Y)$ et $\delta \in A^k(Y)$. Le cycle γ est donné par le calcul

$$(\alpha \Rightarrow) p_*q^*\beta = \gamma \cdot p_*\sigma = \gamma.$$

La section σ étant contractée par q sur un point de X et le cycle β étant de codimension au moins 1,

$$0 = q^*\beta \cdot \sigma = p^*(\alpha \cdot c_1(M) + \delta) \cdot \sigma,$$

et donc

$$\delta = -\alpha \cdot c_1(M).$$

Finalement

$$q_*(Z) \cdot \beta = q_*q^*\beta = q_*(p^*\alpha \cdot (\sigma - p^*c_1(M))).$$

Lemme 5.2. *Si Y est une variété algébrique connexe, projective et lisse sur $\mathbf{C}$ de dimension n et si L est un fibré en droites ample et engendré par ses sections globales sur Y alors le système linéaire $|K_Y + mc_1(L)|$ est sans point base pour tout $m \geq n$ sauf si $m = n$ et $(Y, L) \simeq (\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1))$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que le système linéaire $|K_Y + nc_1(L)|$ est sans point base sauf si $(Y, L) \simeq (\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1))$.

Le diviseur $K_Y + nc_1(L)$ est numériquement effectif si et seulement si $(Y, L) \not\simeq (\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1))$ (voir [Fu87] Theorem 1). Supposons $(Y, L) \not\simeq (\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1))$ et montrons le résultat par récurrence sur la dimension n de Y . Si $n = 1$ alors le résultat est immédiat. Supposons $n \geq 2$. Soit $H \in |L|$ un diviseur général. Le groupe $H^1(\mathcal{O}_Y(K_Y + (n-1)H))$ est nul par le théorème d'annulation de Kodaira. L'application de restriction

$$H^0(Y, \mathcal{O}_Y(K_Y + nH)) \longrightarrow H^0(H, \mathcal{O}_H(K_Y + nH))$$

est donc surjective. Le diviseur $(K_Y + nH)|_H = K_H + (n-1)H|_H$ est numériquement effectif par la formule d'adjonction. Si le système linéaire $|K_H + (n-1)H|_H|$ est sans point base alors $|K_Y + nH|$ l'est donc également. $\square$

5.3. Soit X une variété algébrique complexe, connexe, projective et lisse.

Définition 5.4. Une famille couvrante de courbes rationnelles sur X est une composante irréductible H du schéma H^b introduit au paragraphe 3, telle que le morphisme d'évaluation $\mathbf{P}^1 \times H \longrightarrow X$ soit dominant.

Une telle famille de courbes rationnelles existe si et seulement si X est uniréglée, ce que nous supposerons maintenant. Pour $x \in X$, notons $H_x := H \cap \text{Hom}(\mathbf{P}^1, X, 0 \mapsto x)$.

Lemme 5.5. (voir [De01] Proposition 4.14) Si $x \in X$ est général alors les morphismes paramétrés par H_x sont libres.

Si $x \in X$ est général, H_x est donc une composante connexe du schéma $H_x^{b,1}$ introduit au paragraphe 3. Nous pouvons donc utiliser les résultats des paragraphes 3 et 4.

Soit $x \in X$ général. Le schéma H_x est lisse sur $\mathbf{C}$ de dimension $h^0(\mathbf{P}^1, f^*T_X \otimes I_0)$ en $[f] \in H_x$. Notons V_x et U_x les quotients géométriques de H_x et $\mathbf{P}^1 \times H_x$ par G_0 . Les variétés V_x et U_x sont lisses sur $\mathbf{C}$ de dimension $\ell - 2$ et $\ell - 1$ respectivement, où $\ell := c_1(X) \cdot f_*(\mathbf{P}^1)$ avec $[f] \in H_x$. Soient π_x et ι_x

$$\begin{array}{ccc} U_x & \xrightarrow{\iota_x} & X \\ \pi_x \downarrow & & \\ V_x & & \end{array}$$

les morphismes naturels. Enfin, soit $\sigma_x \subset U_x$ la section de π_x , quotient géométrique de $\{0\} \times H_x$ par le groupe G_0 . La section σ_x est contractée par ι_x sur $x \in X$.

Définition 5.6. La famille H de courbes rationnelles est dite minimale si V_x est propre sur $\mathbf{C}$ pour $x \in X$ général.

Le morphisme ι_x est alors fini (voir [De01] Proposition 3.2).

Notation 5.7. Si H'_x est une composante irréductible de H_x nous noterons $U'_x, V'_x, \sigma'_x, \iota'_x, \pi'_x, M'_x$ et L'_x les variétés, morphismes et fibrés correspondants.

Théorème 5.8. Sous les hypothèses 2.1, si $x \in X$ est général et si U'_x est une composante irréductible de U_x alors les cycles

$$\iota'_{x*}(U'_x) \cdot c_1(X)^2 \in A_{\ell-3}(X) \otimes \mathbf{Q}$$

et

$$\iota'_{x*}(U'_x) \cdot \left(c_2(X) - \frac{\ell-1}{2\ell} c_1(X)^2 \right) \in A_{\ell-3}(X) \otimes \mathbf{Q}$$

sont effectifs.

Démonstration. En utilisant les formules (voir paragraphe 4)

$$\iota'_x{}^* c_1(X) = \ell(\sigma'_x + \pi'_x{}^* c_1(L'_x)), \quad \iota'_x{}^* c_1(X) \cdot \sigma'_x = 0 \quad \text{et} \quad \sigma'^2_x = -\sigma'_x \cdot \pi'_x{}^* c_1(L'_x)$$

on trouve

$$\pi'_{x*} \iota'_x{}^* c_1(X)^2 = \ell^2 c_1(L'_x).$$

En appliquant le lemme 5.1, on obtient

$$\iota'_{x*}(U'_x) \cdot c_1(X)^2 = \frac{1}{\ell^2} \iota'_{x*} \left(\pi'_x{}^* c_1(L'_x) \cdot (\sigma'_x + \pi'_x{}^* c_1(L'_x)) \right).$$

Pour obtenir le premier des deux résultats, il suffit donc de montrer que le fibré en droites L'_x est ample et engendré par ses sections globales, ce que nous allons faire.

Si $[f] \in H'_x$ alors la courbe $f(\mathbf{P}^1)$ est immergée en x (voir [Ke02] Theorem 3.3) : la restriction de la différentielle de l'application ι'_x à $T_{\pi'_x} \subset T_{U'_x}$ définit un morphisme

$$\tau'_x : V'_x \longrightarrow \mathbf{P}(T_{X,x}^*)$$

qui à $[f] \in V'_x$ associe la droite $df_0(T_{\mathbf{P}^1,0})$ de $T_{X,x}$ (voir [Ke02] 3.2). Le fibré en droites L'_x est isomorphe au fibré $\tau'^*_x \mathcal{O}_{\mathbf{P}(T_{X,x}^*)}(1)$ et, puisque τ'_x est fini (voir [Ke02] Theorem 3.4), L'_x est ample et engendré par ses sections globales. Le cycle $\iota'_{x*}(U'_x) \cdot c_1(X)^2$ est donc bien effectif.

La démonstration de la deuxième assertion du théorème est similaire. La formule (voir Proposition 4.3)

$$c_1(V'_x) = \pi'_{x*} \iota'_x{}^* \left(\left(\frac{\ell+1}{2\ell} - \frac{1}{\ell^2} \right) c_1(X)^2 - c_2(X) \right)$$

donne

$$\pi'_{x*} \iota'_x{}^* \left(c_2(X) - \frac{\ell-1}{2\ell} c_1(X)^2 \right) = -c_1(V'_x) + (\ell-1)c_1(L'_x) := \alpha,$$

et, en utilisant à nouveau le lemme 5.1, on obtient

$$\iota'_{x*}(U'_x) \cdot \left(c_2(X) - \frac{\ell-1}{2\ell} c_1(X)^2 \right) = \iota'_{x*} \left(\pi'_x{}^* \alpha \cdot (\sigma'_x + \pi'_x{}^* c_1(L'_x)) \right).$$

Le cycle α est effectif par le lemme 5.2 et $\pi'_x{}^* \alpha \cdot \sigma'_x$ et $\alpha \cdot c_1(L'_x)$ le sont donc aussi. Le théorème est démontré. $\square$

Théorème 5.9. *Sous les hypothèses 2.1, si $x \in X$ est général et si U'_x est une composante irréductible de U_x alors le cycle*

$$\iota'_{x*}(U'_x) \cdot \left(c_2(X) - \left(\frac{\ell-1}{2\ell} + \frac{1}{\ell^2} \right) c_1(X)^2 \right) \in A_{\ell-3}(X) \otimes \mathbf{Q}$$

est effectif sauf s'il existe un morphisme fini $\widehat{X} \rightarrow X$ et une application rationnelle presque régulière $\varphi : \widehat{X} \dashrightarrow Z$ dont les fibres générales sont des espaces projectifs sur $\mathbf{C}$ de dimension $\ell-1$, tels que les courbes rationnelles considérées soient les images dans X des droites contenues dans les fibres de φ .

Démonstration. Soit maintenant $\alpha := -c_1(V'_x) + (\ell-2)c_1(L'_x) \in A_{\ell-3}(V'_x)$ le cycle tel que (voir Lemme 5.1)

$$\iota'_{x*}(U'_x) \cdot \left(c_2(X) - \left(\frac{\ell-1}{2\ell} + \frac{1}{\ell^2} \right) c_1(X)^2 \right) = \iota'_{x*}(\pi_x'^* \alpha \cdot (\sigma'_x + \pi_x'^* c_1(L'_x))).$$

Le cycle α est effectif sauf si $(V'_x, L'_x) \simeq (\mathbf{P}^{\ell-2}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{\ell-2}}(1))$ d'après le lemme 5.2. Si α est effectif alors $\pi_x'^* \alpha \cdot \sigma'_x$ et $\alpha \cdot c_1(L'_x)$ le sont également et le cycle

$$\iota'_{x*}(U'_x) \cdot \left(c_2(X) - \left(\frac{\ell-1}{2\ell} + \frac{1}{\ell^2} \right) c_1(X)^2 \right)$$

est donc effectif dans ce cas. Si $(V'_x, L'_x) \simeq (\mathbf{P}^{\ell-2}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{\ell-2}}(1))$ alors

$$\iota'_{x*}(U'_x) \cdot \left(c_2(X) - \frac{\ell-1}{2\ell} c_1(X)^2 \right) = 0$$

et le cycle

$$\iota'_{x*}(U'_x) \cdot \left(c_2(X) - \left(\frac{\ell-1}{2\ell} + \frac{1}{\ell^2} \right) c_1(X)^2 \right) = -\iota'_{x*}(\pi_x'^* c_1(L'_x) \cdot (\sigma'_x + \pi_x'^* c_1(L'_x)))$$

n'est pas effectif sauf si $\ell = 2$, auquel cas il est nul. Supposons maintenant que l'ensemble Λ des points x de X tels que le cycle

$$\iota'_{x*}(U'_x) \cdot \left(c_2(X) - \left(\frac{\ell-1}{2\ell} + \frac{1}{\ell^2} \right) c_1(X)^2 \right)$$

ne soit pas effectif pour au moins une composante irréductible U'_x de U_x soit dense dans X . Si $x \in \Lambda$ alors, d'après la discussion qui précède, il existe une composante irréductible V'_x de V_x telle que $(V'_x, L'_x) \simeq (\mathbf{P}^{\ell-2}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{\ell-2}}(1))$.

Supposons montré que pour x général dans X et pour toute composante connexe V''_x de V_x , on a $(V''_x, L''_x) \simeq (\mathbf{P}^{\ell-2}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{\ell-2}}(1))$.

Si x est toujours général dans X et si V''_x est une composante connexe de V_x alors τ''_x est une immersion fermée et $\tau''_x(V''_x)$ est un sous-espace linéaire de $\mathbf{P}(T_{X,x}^*)$. L'existence d'un morphisme fini $\widehat{X} \rightarrow X$ et d'une application rationnelle presque

régulière $\varphi : \widehat{X} \dashrightarrow Z$ dont les fibres générales sont des espaces projectifs sur $\mathbf{C}$ de dimension $\ell - 1$, tels que les courbes rationnelles considérées soient les images dans X des droites contenues dans les fibres de φ sont alors démontrées dans [Ar04] (Theorem 3.1). Le théorème est alors démontré.

Il nous reste à démontrer ce point. Rappelons que H a été défini comme étant une composante irréductible du schéma des morphismes génériquement injectifs de $\mathbf{P}^1$ vers X . Notons H^1 l'ouvert non vide (voir Lemme 5.5) de H formé des morphismes libres, V^1 le quotient géométrique de H^1 par G et U^1 le quotient de $\mathbf{P}^1 \times H^1$ par G . Considérons l'application cycle (voir [Ko96] Corollary I 6.9)

$$c : H^1 \longrightarrow \text{Chow}(X)$$

donnée par

$$[f] \mapsto f_* \mathbf{P}^1.$$

Si $\overline{V}$ est la normalisation de l'adhérence de $c(H^1)$ dans $\text{Chow}(X)$ et $\overline{U}$ celle du cycle universel sur $\overline{V}$, il résulte de [Mo79], Lemma 9, que V^1 est isomorphe à l'image inverse dans $\overline{V}$ de $c(H^1)$, et U^1 à son image inverse dans $\overline{U}$. La construction précédente va nous permettre de séparer les composantes connexes des schémas V_x pour x général dans X .

Soient $\bar{\pi}$ et $\bar{\iota}$

$$\begin{array}{ccc} \overline{U} & \xrightarrow{\bar{\iota}} & X \\ \downarrow \bar{\pi} & & \\ \overline{V} & & \end{array}$$

les morphismes naturels. Les fibres générales de $\bar{\pi}$ sont des droites projectives complexes. Le point essentiel est que l'image de $\overline{U} \setminus U$ par $\bar{\iota}$ est un fermé strict de X puisque le schéma V_x est propre sur $\mathbf{C}$ pour $x \in X$ général. Si $x \in X$ est général alors $\bar{\iota}^{-1}(x) \subset U$ et $\bar{\iota}$ est lisse au dessus d'un ouvert non vide de X (voir [Ko96] II 3.5.3 et Lemme 5.5). La restriction de la différentielle de l'application $\bar{\iota}$ à $T_{\bar{\pi}} \subset T_{\overline{U}}$ définit une application rationnelle τ

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow \mathbf{P}(\Omega_X^1) & \\ \tau \nearrow & & \downarrow \\ \overline{U} & \xrightarrow{\bar{\iota}} & X \end{array}$$

bien définie au-dessus d'un ouvert non vide de X (voir [Ke02] Theorem 3.3). Soit $\hat{\iota} : \overline{U} \longrightarrow \widehat{X}$ la factorisation de Stein de $\bar{\iota}$. Le morphisme $\widehat{X} \longrightarrow X$ est étale au-dessus d'un ouvert de X . Soit $\hat{\tau}$ l'application rationnelle définie par la restriction de la différentielle de l'application $\hat{\iota}$ à $T_{\bar{\pi}} \subset T_{\overline{U}}$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{P}(\Omega_X^1) & \xleftarrow{\quad \tau \quad} & \mathbf{P}(\Omega_{\hat{X}}^1) \\
 \downarrow & \nearrow \hat{\tau} & \downarrow \\
 & \mathbf{U} & \\
 \swarrow \bar{\iota} & & \searrow \hat{\iota} \\
 \mathbf{X} & \xleftarrow{\quad \quad \quad} & \hat{\mathbf{X}}
 \end{array}$$

qui est bien définie au-dessus d'un ouvert non vide de X . Il faut enfin remarquer que le morphisme $U_x \supset \sigma_x \simeq V_x \longrightarrow \bar{\iota}^{-1}(x) \subset U$ est un isomorphisme si $x \in X$ est général.

L'ensemble Λ est dense dans X par hypothèse. L'ensemble des points $\hat{x} \in \hat{X}$ tels que

$$\left(\hat{\iota}^{-1}(\hat{x}), \hat{\tau}^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\Omega_{\hat{X}}^1)}(1)_{|\hat{\iota}^{-1}(\hat{x})} \right) \simeq (\mathbf{P}^{\ell-2}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{\ell-2}}(1))$$

est donc dense dans $\hat{X}$. Le faisceau $\omega_{\bar{U}/\hat{X}} \otimes \hat{\tau}^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\Omega_{\hat{X}}^1)}(\ell-1)$ est plat au-dessus d'un ouvert non vide de X . Si $\hat{x} \in \hat{X}$ est un point général alors le faisceau $\omega_{\bar{U}/\hat{X}} \otimes \hat{\tau}^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\Omega_{\hat{X}}^1)}(\ell-1)_{|\hat{\iota}^{-1}(\hat{x})}$ est engendré par ses sections globales (voir Lemme 5.2) et trivial au-dessus d'un point de Λ . L'ensemble des points de $\hat{X}$ où l'espace des sections de ce faisceau est de dimension 1 est en particulier ouvert dans $\hat{X}$ (voir [Ha77] Theorem 12.8) et non vide par hypothèse. Le faisceau $\omega_{\bar{U}/\hat{X}} \otimes \hat{\tau}^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\Omega_{\hat{X}}^1)}(\ell-1)_{|\hat{\iota}^{-1}(\hat{x})}$ est donc trivial pour $\hat{x} \in \hat{X}$ général et, d'après le critère de Kobayashi et Ochiai (voir [KO73]),

$$\left(\hat{\iota}^{-1}(\hat{x}), \hat{\tau}^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\Omega_{\hat{X}}^1)}(1)_{|\hat{\iota}^{-1}(\hat{x})} \right) \simeq (\mathbf{P}^{\ell-2}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{\ell-2}}(1)),$$

ce qui démontre le résultat annoncé plus haut puisque le morphisme $\hat{X} \longrightarrow X$ est fini. $\square$

Proposition 5.10. *Sous les hypothèses 2.1, le cycle*

$$\iota_{x*}(\mathbf{U}_x) \cdot \left(c_2(X) - \frac{\ell-1}{2\ell} c_1(X)^2 \right) \in A_{\ell-3}(X) \otimes \mathbf{Q}$$

est nul pour $x \in X$ général si et seulement s'il existe un morphisme fini $\hat{X} \longrightarrow X$ et une application rationnelle presque régulière $\varphi : \hat{X} \dashrightarrow Z$ dont les fibres générales sont des espaces projectifs sur $\mathbf{C}$ de dimension $\ell-1$, tels que les courbes rationnelles considérées soient les images dans X des droites contenues dans les fibres de φ .

Démonstration. Si le cycle

$$\iota_{x*}(\mathbf{U}_x) \cdot \left(c_2(\mathbf{X}) - \frac{\ell-1}{2\ell} c_1(\mathbf{X})^2 \right) \in A_{\ell-3}(\mathbf{X}) \otimes \mathbf{Q}$$

est nul pour $x \in \mathbf{X}$ général alors

$$(\mathbf{V}'_x, \mathbf{L}'_x) \simeq (\mathbf{P}^{\ell-2}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{\ell-2}}(1))$$

pour toute composante connexe $\mathbf{V}'_x$ de $\mathbf{V}_x$ (voir Théorème 5.8) et le Theorem 3.1 de [Ar04] donne la conclusion cherchée.

Inversement, supposons qu'il existe un morphisme fini $\nu : \widehat{\mathbf{X}} \rightarrow \mathbf{X}$ et une application rationnelle presque régulière $\varphi : \widehat{\mathbf{X}} \dashrightarrow \mathbf{Z}$ dont les fibres générales sont des espaces projectifs sur $\mathbf{C}$ de dimension $\ell-1$, tels que les courbes rationnelles considérées soient les images dans $\mathbf{X}$ des droites contenues dans les fibres de φ . Soient $\mathbf{F} \simeq \mathbf{P}^{\ell-1}$ une fibre générale de φ et $j : \mathbf{F} \hookrightarrow \widehat{\mathbf{X}}$ l'immersion fermée de $\mathbf{F}$ dans $\widehat{\mathbf{X}}$. La formule de projection donne

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \nu^* \left(c_2(\mathbf{X}) - \frac{\ell-1}{2\ell} c_1(\mathbf{X})^2 \right) &= j_* \left(c_2(\mathbf{F}) - \frac{\ell-1}{2\ell} c_1(\mathbf{F})^2 \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \iota_{x*}(\mathbf{U}_x) \cdot \left(c_2(\mathbf{X}) - \frac{\ell-1}{2\ell} c_1(\mathbf{X})^2 \right) &= \nu_*(\mathbf{F}) \cdot \left(c_2(\mathbf{X}) - \frac{\ell-1}{2\ell} c_1(\mathbf{X})^2 \right) \\ &= \nu_* \left(\mathbf{F} \cdot \nu^* \left(c_2(\mathbf{X}) - \frac{\ell-1}{2\ell} c_1(\mathbf{X})^2 \right) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Remarque 5.11. Le résultat 5.9 peut être amélioré sous les hypothèses suivantes. Supposons $\ell = 3$ ou encore $\dim(\mathbf{V}'_x) = 1$. Soit $\mathbf{D}'_x \subset \mathbf{V}'_x$ le diviseur de $\mathbf{V}'_x$ tel que l'application induite

$$\mathbf{T}_{\mathbf{V}'_x} \longrightarrow \tau_x'^* \mathbf{T}_{\mathbf{P}(\mathbf{T}_{\mathbf{X},x}^*)}(-\mathbf{D}'_x)$$

soit partout non nulle : son conoyau $\mathbf{Q}$ est donc localement libre. Supposons $\mathbf{D}'_x$ non nul. Le fibré $\tau_x'^* \mathbf{T}_{\mathbf{P}(\mathbf{T}_{\mathbf{X},x}^*)} \otimes \mathbf{M}'_x$ étant engendré par ses sections globales, le faisceau $\mathbf{Q} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{V}'_x}(\mathbf{D}'_x) \otimes \mathbf{M}'_x$ l'est également.

Lemme 5.12. *Soit $\mathbf{Y}$ une variété complexe lisse de dimension $n \geq 1$. Si $\mathbf{G}$ est un faisceau cohérent, localement libre en codimension 1 et engendré par ses sections globales alors le cycle $c_1(\mathbf{G}) \in \mathbf{A}(\mathbf{Y})$ est effectif.*

Démonstration. Le faisceau G est localement libre sur un ouvert $Y_0 \subset Y$ dont le complémentaire est de codimension au moins 2 dans Y et $G|_{Y_0}$ est également engendré par ses sections globales. Notons i l'inclusion de Y_0 dans Y . L'application $i^* : A_{n-1}(Y) \rightarrow A_{n-1}(Y_0)$ étant un isomorphisme, il suffit de traiter le cas où G est localement libre et engendré par ses sections globales, qui est immédiat. $\square$

Soit $\alpha := c_1(Q \otimes \mathcal{O}_{V'_x}(D'_x) \otimes M'_x) \in A_{\ell-3}(V'_x)$. Le cycle α est effectif d'après le lemme 5.12,

$$\begin{aligned} c_1(V'_x) &= c_1(L'_x) + (n-1)(c_1(L'_x) - D'_x) - c_1(Q) \\ &= c_1(L'_x) + (n-1)(c_1(L'_x) - D'_x) + (n-2)(-c_1(L'_x) + D'_x) - \alpha \\ &= 2c_1(L'_x) - D'_x - \alpha \end{aligned}$$

et

$$\iota'_{x*}(U'_x) \cdot (c_2(X) - \frac{1}{3}c_1(X)^2) = \frac{1}{2\ell} \iota'_{x*}(\pi'^*(D'_x + \alpha) \cdot (\sigma'_x + \pi'^*c_1(L'_x))).$$

Sous les hypothèses précédentes, le cycle $\iota'_{x*}(U'_x) \cdot (c_2(X) - \frac{1}{3}c_1(X)^2)$ est donc effectif et non trivial sauf si la seconde alternative du Théorème 5.9 est vérifiée.

Le support du diviseur D'_x est le lieu des points de V'_x où le morphisme τ'_x est ramifié. Le Lemme suivant en donne une caractérisation.

Lemme 5.13. (voir [Ar04] Proposition 2.7) *Le morphisme τ'_x est une immersion en $[f] \in V'_x$ si et seulement si $f^*T_X \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}^{\oplus n-2}$.*

Références

- [Ar04] Araujo, C.: Rational curves of minimal degree and characterizations of $\mathbf{P}^n$, preprint math.AG/04010584
- [Au76] Aubin, T.: Equations du type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **283**, A119–A121 (1976)
- [CO75] Chen, B., Ogiue, K.: Some characterizations of complex space forms in terms of Chern classes. Quart. J. Math. Oxford **26**, 459–464 (1975)
- [De01] Debarre, O.: Higher-dimensional algebraic geometry. Universitext, Springer-Verlag, 2001
- [Dr04] Druel, S.: Caractérisation de l'espace projectif. Manuscripta Math. **115**, 19–30 (2004)
- [Fu87] Fujita, T.: On polarized manifolds whose adjoint bundles are not semipositive. Adv. Stud. Pure Math. **10**, 167–178 (1987)
- [Fu98] Fulton, W.: Intersection theory, Second edition. Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete **3**, Springer-Verlag, 1998
- [Ha77] Hartshorne, R.: Algebraic Geometry. Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer-Verlag, 1977
- [Ke02] Kebekus, S.: Families of singular rational curves. J. of Algebraic Geometry **11**, 245–256 (2002)

- [KO73] Kobayashi, S., Ochiai, T.: Characterization of complex projective spaces and hyperquadrics. *J. Math. Kyoto Univ.* **13**, 31–47 (1973)
- [Ko96] Kollár, J.: Rational curves on algebraic varieties. *Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete* **32**, Springer-Verlag, 1996
- [Mo79] Mori, S.: Projective manifolds with ample tangent bundles. *Ann. of Math.* **110**, 593–606 (1979)
- [Ti02] Tian, G.: Canonical metrics in Kähler geometry. *Lect. in Math. ETH*, Birkhäuser (2000)
- [Ya78] Yau, S.-T.: On the Ricci curvature of compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I. *Comm. Pure Appl. Math.* **31**, 339–411